САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. Н. КВИТКО, Н. В. РАСПОПОВА, А. М. МАКСИНА

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАБИЛИЗАЦИИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2020

УДК 517.9
ББК 22.143

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *А.М. Камачкин* (С.-Петерб. гос. у-нт); д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры Высшей математики *С.М. Хрящев* (Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова)

Печатается по рекомендации Учебно-методической комиссии по УГСН 27.00.00 Управление в технических системах Санкт-Петербургского государственного университета

Алгоритмы решения задач стабилизации: Учеб. пособие / Квитко А.Н., Распопова Н.В., Максина А.М. — СПб.: ВВМ, 2020. — 121 с.

ISBN

В методическом пособии представлены алгоритмы стабилизации нелинейных стационарных и нестационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в различных классах управляющих функций как на конечном, так и на бесконечном промежутках времени. Рассмотрены вопросы построения стабилизирующих управлений в случаях полной и неполной управляемости, неполной информации о фазовом состоянии объекта, а также дискретности, запаздывания и ограниченности управляющего сигнала.

Методическое пособие направлено на обучение студентов методам построения управляющих функций, гарантирующих стабилизацию для широкого класса нелинейных систем, а также на формирование навыков анализа математических моделей в различных практических задачах.

Библиогр. 79 назв. Ил. 2.

.

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Создание гибких автономных, помехозащищенных систем управления и их моделирование в реальном времени на различных этапах проектирования, вызванное потребностями современной техники, определило круг математических задач, которые необходимо решать для разработки алгоритмов математического обеспечения как бортовых вычислительных комплексов, так и средств моделирования. Существенное место среди этих задач занимают задачи стабилизации нелинейных стационарных систем, которые связаны с поиском методов построения различных типов управляющих функций, гарантирующих экспоненциальную устойчивость положения равновесия систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта управления.

Данное пособие посвящено разработке алгоритмов построения указанных стабилизирующих законов управления.

Пособие состоит из двух глав.

Первая глава содержит три параграфа. В первом параграфе предложен алгоритм построения дискретной управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат и произвольную окрестность начала координат с учетом ограничений на управление и внешнее возмущение. Получено конструктивное достаточное условие Калмановского типа, при котором указанный перевод возможен. Рассмотрена задача управления роботом-манипуляторм и проведено ее численное моделирование.

Во втором параграфе представлен алгоритм построения управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат и произвольную окрестность начала координат с учетом ограничений на управление и внешнее возмущение. Получено конструктивное достаточное условие Калмоновского типа, при котором указанный перевод возможен.

В третьем параграфе разработан алгоритм построения дифференцируемых управляющих функций, гарантирующих перевод широкого класса нелинейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат с учетом запаздывания управляющего сигнала. Получены конструктивные достаточные условия, наложенные на правую часть управляемой системы, при которых возможен указанный перевод. Рассмотрена задача управления роботом-манипулятором и проведено ее численное моделирование.

Вторая глава содержит четыре параграфа. В первом параграфе представлен алгоритм построения синтезирующего управления, гарантирующего стабилизацию нелинейной стационарной системы в случаях олной и неполной управляемости ее линейной части с учетом ограничений на управление.

Во втором параграфе предложен алгоритм построения синтезирующего дискретного управления, обеспечивающего стабилизацию нелинейной стационарной системы с учетом ограничений на управление.

В третьем параграфе разработан конструктивный метод построения синтезирующего управления, гарантирующего стабилизацию нелинейной стационарной системы с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта, а также ограничений на управление.

В четвертом параграфе представлен алгоритм построения управления, гарантирующего стабилизацию нелинейной стационарной системы с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта, дискретности управляющего сигнала и ограничений на управление.

Во всех параграфах найдены достаточно легко проверяемые критерии Калмановского типа, гарантирующие существование решения поставленных задач.

Материалы данного учебного пособия используются при чтении курса «Методы решения граничных задач для управляемых систем».

ГЛАВА 1. СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

§1. Решение задачи стабилизации для нелинейных стационарных систем с учетом возмущений в классе кусочно-постоянных управлений

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x,u) + F, \tag{1}$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u_1, \dots, u_r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0,1],$$

$$f \in C^{4n}(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f_1, \dots, f_n)^T, \tag{2}$$

$$F \in R^n, \quad F = (F_1, \dots, F_n)^T$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$S = (B, AB, \dots, A^{n-1}B), \quad \operatorname{rank} S = n, \tag{4}$$

$$\|u\| < N, \quad N > 0, \quad N = \text{const}. \tag{5}$$

Здесь F — постоянно действующее возмущение. Рассмотрим бесконечное разбиение интервала $[0,1]$ точками

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < 1,$$

где $t_k \to 1$ при $k \to \infty$.

Определение. Функцию

$$u(t) = u_k,\ u_k \in R^r,\ t \in [t_k, t_{k+1}),\ u(0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots$$

будем называть *дискретной управляющей функцией.*
Задача 1. Найти дискретное управление $u(t)$ заданное на бесконечном разбиении интервала $[0, 1]$ и абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, почти всюду удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$x(0) = \bar{x},\ x(1) = 0,\ \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T. \tag{6}$$

Пары функций $x(t), u(t)$, указанные в Задаче 1, будем называть соответственно решениями задачи (1), (6).

1.1 Построение вспомогательной задачи

Теорема. *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (4). Тогда существует $\varepsilon > 0, h_0 > 0$ такое, что $\forall \bar{x} \in R^n$, $\forall F \in R^n, \forall h$: $\|\bar{x}\| < \varepsilon$, $\|F\| < \varepsilon$, $0 < h < h_0$ существует решение Задачи 1, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Главная идея доказательства теоремы состоит в том, что посредством преобразований зависимых и независимых переменных и введением вспомогательного управления, решение исходной задачи сводится к решению задачи стабилизации вспомогательной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится синтезирующее управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части этой системы. На заключительном этапе решаем задачу Коши для вспомогательной системы и переходим к исходным переменным.

Рассмотрим задачу: найти дискретное управление $u(t)$ и абсолютно непрерывную функцию $x(t)$ почти всюду удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 1. \tag{7}$$

Указанную пару функций $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (7).

Замечание 1. Переходя к пределу в решении задачи (1), (7) при $t \to 1$ получим решение Задачи 1.

Сделаем в системе (1) преобразование независимой переменной t на τ:

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{8}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной τ система (1) примет вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f(c, d) + \alpha e^{-\alpha\tau} F, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &c(\tau) = x(t(\tau)), \quad d(\tau) = u(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty), \\ &c = (c_1, \dots, c_n)^T, \quad d = (d_1, \dots, d_r)^T. \end{aligned} \tag{10}$$

Введем в рассмотрение управление

$$\bar{d}(\tau) = d(kh),\ \tau \in [kh, (k+1)h),\ h > 0,\ k = 0, 1, \dots$$

Задача 2. Найти абсолютно непрерывную функцию $c(\tau)$ и дискретное управление $\bar{d}(\tau)$ почти всюду, удовлетворяющие системе (9) и условиям

$$c(0) = \bar{x}, \quad c(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty. \tag{11}$$

Указанную пару функций $c(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ будем называть решением Задачи 2.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что имея решение Задачи 2, с помощью формул (8) и (10) легко получить решение Задачи 1. Введем обозначения

$$\tilde{c} = \theta_i c, \quad \tilde{d} = \theta_i d, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n,$$

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{r} m_i, \quad k! = k_1! \dots k_n!, \quad m! = m_1! \dots m_r!$$

Используя свойства (2), (3) и разложение правой части системы (1) в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0)$, систему (9) можно записать в виде:

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} F_i + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0) d_j +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0) c_j c_k + 2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(0,0) c_j d_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0) d_j d_k \right) + \dots + \alpha e^{-\alpha\tau} \times$$

$$\sum_{|k|+|m|=4n-1} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r}}(0,0) \times$$

$$\times c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} + \alpha e^{-\alpha\tau} \times$$

$$\sum_{|k|+|m|=4n} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r}}(\tilde{c}, \tilde{d}) \times$$

$$\times c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r}, i = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Ограничем область изменения $c(\tau)$ неравенством

$$\|c(\tau)\| < C_1, \quad \tau \in [0, +\infty). \tag{13}$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций $c_i(\tau)$: c_i к $c_i^{(4n)}$, $i = 1, \dots, n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований нормы слагаемых, не содержащих в явном виде степеней компонент $c^{(4n)}$ и d в области (5),(13), удовлетворяли оценке $O(e^{-4n\alpha\tau}\|F\|)$ при $\tau \to \infty$, $\|F\| \to 0$.

На первом этапе выполним замену $c_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$ на $c_i^{(1)}(\tau)$, $i = 1, \dots, n$ по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{14}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|}f_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|}f_i}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\partial u_2^{m_2}\dots\partial u_r^{m_r}},\ i=1,\dots,n.$$

После подстановки (14) в левую и правую части системы (12) с учетом введенного обозначения получим систему

$$\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)F_j +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0)F_jF_k +$$
$$+\alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)c_j^{(1)} - e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0)F_kc_j^{(1)}) +$$
$$+\alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(0,0)d_k - e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k\partial x_j}(0,0)F_jd_k) +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0)c_j^{(1)}c_k^{(1)} +$$
$$+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(0,0)d_kc_j^{(1)} +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(0,0)d_jd_k + \dots +$$
$$+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n-1}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(0,0)(c_1^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times$$
$$(c_2^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_2)^{k_2}\dots\times(c_n^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}d_2^{m_2}\dots d_r^{m_r} +$$
$$+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(\tilde{c},\tilde{d})(c_1^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times$$
$$(c_2^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_2)^{k_2}\dots\times(c_n^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}d_2^{m_2}\dots d_r^{m_r},$$
$$i=1,\dots,n. \tag{15}$$

Из (11), (14) следует

$$c_i^{(1)}(0) = \bar{x}_i + F_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (15) нормы слагаемых, не содержащих в явном виде степеней компонент векторов $c^{(1)}$ и d, в области (5), (13) удовлетворяют условию $O(e^{-2\alpha\tau}\|F\|)$ при $\tau \to \infty$, $\|F\| \to 0$. На втором этапе сделаем замену

$$\begin{gathered}
c_i^{(1)}(\tau) = c_i^{(2)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)F_j = c_i^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_i^{(2)}(F), \\
\varphi_i^{(2)}(F) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)F_j, \varphi_i^{(2)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{17}$$

В результате в новых переменных система (15) и начальные условия (16) примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i^{(2)}}{d\tau} &= \alpha(\frac{1}{2}e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)F_jF_k + \\
&+ \alpha e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\varphi_j^{(2)} - e^{-4\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)F_k\varphi_j^{(2)} + \\
&+ \frac{1}{2}e^{-5\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)\varphi_j^{(2)}\varphi_k^{(2)}) + \\
&+ \alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)c_j^{(2)} - e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)F_kc_j^{(2)} + \\
&+ e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)\varphi_k^{(2)}c_j^{(2)}) + \alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(0,0)d_k + \\
&+ e^{-2\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(0,0)F_kd_k + \\
&+ e^{-3\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(0,0)\varphi_j^{(2)}d_k) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0)c_k^{(2)}c_j^{(2)}+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(0,0)d_k c_j^{(2)}+\\
&+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(0,0)d_j d_k+\cdots+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n-1}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(0,0)\times\\
&(c_1^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\varphi_1^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}(c_2^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\varphi_2^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_2)^{k_2}\times\\
&\times\cdots\times(c_n^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\varphi_n^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}d_2^{m_2}\dots d_r^{m_r}+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(\tilde c,\tilde d)\times\\
&\times(c_1^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\varphi_1^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}(c_2^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\varphi_2^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_2)^{k_2}\times\\
&\times\cdots\times(c_n^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\varphi_n^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}d_2^{m_2}\dots d_r^{m_r},\\
&i=1,\dots,n,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
c_i^{(2)}(0)=\bar x_i+F_i-\varphi_i^{(2)}(F),\quad \varphi_i^{(2)}(0)=0,\quad i=1,\dots,n. \tag{19}
$$

В отличии от предыдущей замены в правой части системы (18) нормы слагаемых, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $c^{(2)}$ и d в области (5), (13) удовлетворяют условию $O(e^{-3\alpha\tau}\|F\|)$ при $\tau\to\infty$, $\|F\|\to 0$. Используя (14)–(19) и индуктивный переход на k-м шаге получим искомое преобразование вида:

$$
c_i^{(k-1)}(\tau)=c_i^{(k)}(\tau)+e^{-k\alpha\tau}\varphi_i^{(k)}(F),\quad \varphi_i^{(k)}(0)=0,\quad i=1,\dots,n. \tag{20}
$$

Если применить преобразование (20) $4n$ раз, объединить слагаемые в полученной системе линейные по компонентам вектора $c^{(4n)}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i=1,\dots,n$, а также слагаемые линейные по компонентам вектора d и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i=1,\dots,n$, то согласно (15)–(20) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{dc^{(4n)}}{d\tau}=Pc^{(4n)}+Qd+R_1(c^{(4n)},d,\tau)+\\&+R_2(c^{(4n)},d,\tau)+R_3(c^{(4n)},d,\tau)+R_4(c^{(4n)},d,\tau),\\&R_1=(R_1^1,\ldots,R_1^n)^T,\ R_2=(R_2^1,\ldots,R_2^n)^T,\\&R_3=(R_3^1,\ldots,R_3^n)^T,R_4=(R_4^1,\ldots,R_4^n)^T,\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}&P=\alpha e^{-\alpha\tau}(A+e^{-\alpha\tau}P_2(F)+\cdots+e^{-(n-1)\alpha\tau}P_{n-1}(F)),\\&Q=\alpha e^{-\alpha\tau}(B+e^{-\alpha\tau}Q_2(F)+\cdots+e^{-(n-1)\alpha\tau}Q_{n-1}(F)),\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&c^{(4n)}(0)=\bar{x}+F-\varphi^{(2)}(F)-\varphi^{(3)}(F)-\cdots-\varphi^{(4n)}(F),\\&\varphi^{(i)}=(\varphi_1^{(i)},\ldots,\varphi_n^{(i)})^T,\quad \varphi^{(i)}(0)=0,\quad i=1,\ldots,4n.\end{aligned}\tag{23}$$

Функции R_1^i содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $c^{(4n)}$ с коэффициентам $e^{-i\alpha\tau}$, $i\geqslant n+1$. Функции R_2^i содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора d с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i\geqslant n+1$. В R_3^i содержатся все слагаемые нелинейные по компонентам векторов $c^{(4n)}$ и d. Функция R_4^i состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $c^{(4n)}$ и d.

Введем новую управляющую функцию $\upsilon(\tau)$, связанную с $d(\tau)$ уравнением

$$\frac{dd(\tau)}{d\tau}=\upsilon,\ \ \upsilon=(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_r)^T.\tag{24}$$

Положим

$$d(0)=0.\tag{25}$$

Тогда систему (21), (24) и начальные данные (23), (25) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau}=\bar{P}\bar{c}^{(4n)}+\bar{Q}\upsilon+\bar{R}_1(c^{(4n)},d,\tau)+\bar{R}_2(c^{(4n)},d,\tau)+\\&+\bar{R}_3(c^{(4n)},d,\tau)+\bar{R}_4(c^{(4n)},d,\tau),\ \ \bar{c}^{(4n)}=(c^{(4n)},d)^T_{n+r\times 1},\end{aligned}\tag{26}$$

$$\bar{R}_1=(R_1^1,\ldots,R_1^n,0,\ldots0)^T_{n+r\times1},\quad \bar{R}_2=(R_2^1,\ldots,R_2^n,0,\ldots0)^T_{n+r\times1},$$

$$\bar{R}_3 = (R_3^1, \ldots, R_3^n, 0, \ldots 0)^T_{n+r\times 1}, \quad \bar{R}_4 = (R_4^1, \ldots, R_4^n, 0, \ldots 0)^T_{n+r\times 1},$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r\times n+r}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r\times r},$$

$$\bar{c}^{(4n)}(0) = \bar{c}_0^{(4n)}, \quad \bar{c}_0^{(4n)} = (c^{(4n)}(0), 0, \ldots, 0)^T, \tag{27}$$

где $O_i, i = 1,2,3$ — матрицы с нулевыми элементами соответствующих размерностей, E — единичная матрица.
Замечание 3. Пусть $\tilde{S} = \{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_{n+r}\}$,

$$\tilde{L}_1 = \bar{Q}, \tilde{L}_i = \bar{P}\tilde{L}_{i-1} - \frac{d\tilde{L}_{i-1}}{d\tau}, i = 2, \ldots, n+1,$$

$$\tilde{\tilde{L}}_1 = Q, \tilde{\tilde{L}}_i = P\tilde{\tilde{L}}_{i-1} - \frac{d\tilde{\tilde{L}}_{i-1}}{d\tau}, i = 2, \ldots, n.$$

Очевидно,

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} O_{n\times r} & \tilde{\tilde{L}}_1 & \ldots & \tilde{\tilde{L}}_n \\ E_{r\times r} & O_{r\times r} & \ldots & O_{r\times r} \end{pmatrix},$$

где $O_{n\times r}, O_{r\times r}$ — матрицы с нулевыми элементами соответствующих размерностей.

Из условий (20), (17), (14), (11) следует существование $C_2 > 0$, $C_3 > 0$, таких что для всех $c^{(4n)}$ и F, принадлежащих области

$$\|c^{(4n)}\| < C_2, \quad \|F\| < C_3, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{28}$$

соответствующая функция $c(\tau)$ будет принадлежать области (13).

1.2 Оценка слагаемых правой части вспомогательной системы и описание процедуры построения решения задач

Из построения системы (21) and определения функций R_1^i, R_2^i, R_3^i, R_4^i в области (5), (27) следуют следующие оценки

$$\|P_i(F)\| \to 0, \quad \|Q_j(F)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|F\| \to 0, \tag{29}$$

$$i = 2, \ldots, n-1, \quad j = 2, \ldots, n-1,$$

$$
\begin{aligned}
&\|R_1(c^{(4n)},d,\tau)\| \leqslant e^{-(n+1)\alpha\tau}L_1\|c^{(4n)}\|,\\
&\|R_2(c^{(4n)},d,\tau)\| \leqslant e^{-(n+1)\alpha\tau}L_2\|d\|,\\
&\|R_3(c^{(4n)},d,\tau)\| \leqslant e^{-\alpha\tau}L_3(\|c^{(4n)}\|^2+\|d\|^2),\\
&\|R_4(c^{(4n)},d,F,\tau)\| \leqslant e^{-(4n+1)\alpha\tau}L_4(F).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$$
L_i>0, i=1,2,3, \quad L_4(F)>0.
$$

Кроме того, из построения R_4 следует, что

$$
L_4(F)\to 0 \text{ при } \|F\|\to 0.
$$

Рассмотрим линейную часть системы (26)

$$
\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c}^{(4n)} + \bar{Q}\upsilon. \tag{31}
$$

Лемма. *Пусть для системы (1) выполнены условия (4). Тогда существует $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_1<C_3$ такое что для всех $F\in R^n$: $\|F\|<\varepsilon_1$ существует управление $\upsilon(\tau)$ вида:*

$$
\upsilon(\tau)=M(\tau)\bar{c}^{(4n)}, \quad \|M(\tau)\|=O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau\to\infty, \tag{32}
$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (31), замкнутой управлением (32).

После решения задачи стабилизации системы (31) находим решение задачи Коши для системы (26) с начальными данными (27) с учетом подстановки в ее правую часть управления (32). В результате получим известную функцию $d(\tau),\upsilon(\tau)$. Далее строим функцию

$$
\bar{d}(\tau)=d(kh), \text{ при } \tau\in[kh,(k+1)h], \ h>0, \ k=0,1,\dots \tag{33}
$$

и решаем задачу Коши для системы (26) с начальными данными (27) после подстановки в ее правую часть функции $\bar{d}(\tau)$. Решение задачи Коши дает известную функцию $c^{(4n)}(\tau)$. Используя формулы перехода (20), (17), (14) будем иметь известные функции $c(\tau),\bar{d}(\tau)$, $\tau\in[0,+\infty)$, которые являются решением Задачи 2. На заключительном этапе с помощью формул (10), (8) и предельного перехода получим пару функций $x(t),u(t)$, которая согласно Замечанию 1, является решением исходной Задачи 1. При этом моменты времени t_k, фигурирующие в определении дискретного управления, находятся по формуле

$$t_k = 1 - e^{-\alpha k h}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{34}$$

Если в решении Задачи 1 выбрать t_m так, чтобы $\|x(t_m)\| \leqslant \varepsilon_1$, $|t_m - 1| < \varepsilon_2$, то на промежутке $[0, t_m]$ получим пару функций $x(t), u(t)$, которая является решением Задачи 2.

1.3 Доказательство леммы

Пусть L_1^j, $j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы $\bar{Q}$. Построим матрицу

$$\begin{aligned} &S_1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{k_1}^1, L_1^2, \ldots, L_{k_2}^2, \ldots, L_1^r, \ldots, L_{k_r}^r\}, \\ &L_i^j = \bar{P} L_{i-1}^j - \frac{dL_{i-1}^j}{d\tau}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j. \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь k_j, $j = 1, \ldots, r$ — максимальное количество столбцов вида $L_1^j, \ldots, l_{k_j}^j$, $j = 1, \ldots, r$ таких что векторы $L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{k_1}^1, L_1^2, \ldots, L_{k_2}^2, \ldots, L_1^r, \ldots, L_{k_r}^r$ линейно независимы $\forall \tau \in [0, +\infty)$. Пусть $\bar{L}_1^j$, $j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы Q. Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} &S_2 = \{\bar{L}_1^1, \bar{L}_2^1, \ldots, \bar{L}_{k_1}^1, \bar{L}_1^2, \ldots, \bar{L}_{k_2}^2, \ldots, \bar{L}_1^r, \ldots, \bar{L}_{k_r}^r\}, \\ &\bar{L}_i^j = P \bar{L}_{i-1}^j - \frac{d\bar{L}_{i-1}^j}{d\tau}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j. \end{aligned}$$

Покажем, что при достаточно малых $\|F\|$

$$\operatorname{rank} S_2 = n, \quad \forall \tau \in [0, +\infty). \tag{36}$$

Пусть $\bar{\bar{L}}_1^j, j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы $\alpha e^{-\alpha\tau} B$. Построим матрицу

$$\begin{aligned} &S_3 = \{\bar{\bar{L}}_1^1, \bar{\bar{L}}_2^1, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_1}^1, \bar{\bar{L}}_1^2, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_2}^2, \ldots, \bar{\bar{L}}_1^r, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_r}^r\}, \\ &\bar{\bar{L}}_i^j = \alpha e^{-\alpha\tau} A \bar{\bar{L}}_{i-1}^j - \frac{d\bar{\bar{L}}_{i-1}^j}{d\tau}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j. \end{aligned}$$

Из условий (22), (29) следует существование $\bar{\varepsilon}_1 > 0, \bar{\varepsilon}_1 < C_3$ такого, что для всех F: $\|F\| < \bar{\varepsilon}_1$ $\operatorname{rank} S_2 = \operatorname{rank} S_3, \forall \tau \in [0, +\infty)$. Рассуждая методом от противного и используя (4), нетрудно убедиться в справедливости равенства $\operatorname{rank} S_2 = \operatorname{rank} S_3 = n, \forall \tau \in [0, +\infty)$. Кроме того из структуры матрицы (35) (см. Замечание 3) и условий (36),(22) следует, что $\operatorname{rank} S_1 = n + r$, $\forall \tau \in [0, +\infty)$, а также

$$\|S_1^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau}), \tau \to \infty. \tag{37}$$

Положим величину $\varepsilon_1 > 0$, которая фигурирует в формулировке леммы, равной $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$. Считая, что $\|F\| < \varepsilon_1$ выполним в системе (31) замену переменных

$$\bar{c}^{(4n)} = S_1(\tau) y. \tag{38}$$

В результате получим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = S_1^{-1}\left(\bar{P} S_1 - \frac{dS_1}{d\tau}\right) y + S_1^{-1} \bar{Q} \upsilon.$$

Согласно [76]

$$S_1^{-1}(\bar{P} S_1 - \frac{dS_1}{d\tau}) =$$
$$= \{\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_{k_1}, \bar{\varphi}_{k_1}(\tau), \ldots, \bar{e}_{k_1 + \cdots + k_{r-1} + 2}, \bar{\varphi}_{k_r - 1}(\tau), \ldots, \bar{e}_{k_1 + \cdots + k_r}, \bar{\varphi}_{k_r}(\tau)\},$$

$\bar{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T_{n+r \times 1}$, где 1 стоит на i-ом месте,

$$\bar{\varphi}_{k_j} = (-\varphi^1_{k_1}, \ldots, -\varphi^{k_1}_{k_1}, \ldots, -\varphi^1_{k_j}, \ldots, -\varphi^{k_j}_{k_j}, 0, \ldots, 0)^T_{n+r \times 1},$$

$-\varphi^i_{k_j}$ являются коэффициентами разложения вектора $L^j_{k_j+1}$ по векторам L^1_i, $i = 1, \ldots, k_1$; L^2_i, $i = 1, \ldots, k_2$; $\ldots$; L^j_i, $i = 1, \ldots, k_j$, $j = 1, \ldots, r$, $\sum_{j=1}^r k_j = n + r$, то есть

$$L^j_{k_j+1} = -\sum_{i=1}^{k_1} \varphi^i_{k_1}(\tau) L^1_i - \cdots - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi^i_{k_j}(\tau) L^j_i, \tag{39}$$

$S_1^{-1}\bar{Q} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{k_j+1}, \ldots, \bar{e}_{\gamma+1}\}_{n+r \times r}$, $\gamma = \sum_{i=1}^{r-1} k_i$. Рассмотрим задачу стабилизации системы вида:

$$\begin{aligned} &\frac{dy_{k_j}}{d\tau} = \{\bar{e}^{k_j}_2, \ldots, \bar{e}^{k_j}_{k_j}, \bar{\bar{\varphi}}_{k_j}\} y_{k_j} + \bar{e}^{k_j}_1 \upsilon_j, \quad j = 1, \ldots, r, \\ &y_{k_j} = (y^1_{k_j}, \ldots, y^{k_j}_{k_j})^T_{k_j \times 1}, \quad \bar{e}^{k_j}_1 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T_{k_j \times 1}, \end{aligned} \tag{40}$$

где 1 стоит на i-том месте, $\bar{\bar{\varphi}}_{k_j} = (-\varphi^1_{k_j}, \dots, -\varphi^{k_j}_{k_j})^T_{k_j \times 1}$. Пусть $y^{k_j}_{k_j} = \psi$. Фазовые переменные системы (40) связаны с функцией $\psi(\tau)$ равенствами

$$
\begin{gathered}
y^{k_j}_{k_j} = \psi, \quad y^{k_j-1}_{k_j} = \psi^{(1)} + \varphi^{k_j}_{k_j}\psi, \\
y^{k_j-2}_{k_j} = \psi^{(2)} + \varphi^{k_j}_{k_j}\psi^{(1)} + \left(\frac{d\varphi^{k_j}_{k_j}}{d\tau} + \varphi^{k_j-1}_{k_j}\right)\psi, \dots
\end{gathered} \tag{41}
$$

$$
y^1_{k_j} = \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau)\psi^{(k_j-2)} + \dots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + r_0(\tau)\psi.
$$

Дифференцируя последнее равенство (41) сводим систему (40) к уравнениям

$$
\psi^{(k_j)} + \varepsilon_{k_j-1}(\tau)\psi^{(k_j-1)} + \dots + \varepsilon_0(\tau)\psi = \upsilon_j, \quad j = 1, \dots, r. \tag{42}
$$

Замечание 4. Из (39), (22) и определений функций $\varphi^i_{k_j}$, $i = 1, \dots, k_j$ следует, что в (40)–(42) функции $\varphi^{k_j}_{k_j}(\tau), \dots, \varphi^2_{k_j}(\tau)$, $\varphi^1_{k_j}(\tau)$, их производные, а также функции $r_{k_j-2}(\tau), \dots, r_0(\tau)$, $\varepsilon_{k_j-1}(\tau), \dots, \varepsilon_0(\tau)$ ограничены.

Пусть

$$
\upsilon_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i})\psi^{(k_j-i)}, \quad j = 1, \dots, r, \tag{43}
$$

где γ_{k_j-i}, $i = 1, \dots, k_j$ выбраны так, чтобы корни $\lambda^1_{k_i}, \dots, \lambda^{k_i}_{k_i}$ уравнений

$$
\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1} + \dots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \dots, r
$$

удовлетворяли условиям

$$
\lambda^i_{k_i} \neq \lambda^j_{k_i},\ i \neq j,\ \lambda^j_{k_i} < -(2n+1)\alpha - 1, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, r.
$$

Возвращаясь в (43) к исходным переменным, получим

$$
\begin{gathered}
\upsilon_j = \delta_{k_j} T^{-1}_{k_j} S^{-1}_{1k_j} \bar{c}^{(4n)},\ j = 1, \dots, r, \\
\delta_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1}, \dots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0),
\end{gathered}
$$

T_{k_j} — матрица равенства (41), то есть

$$y_{k_j} = T_{k_j}\bar{\psi},\ \bar{\psi} = (\psi^{(k_j-1)}, \ldots, \psi)^T,$$

$S^{-1}_{1k_j}$ — матрица, состоящая из соответствующих k_j-строк матрицы S^{-1}_1. Найденное управление можно записать в виде (32), где

$$M(\tau) = \delta_k T^{-1}_k S^{-1}_{1k} = (\delta_{k_1} T^{-1}_{k_1} S^{-1}_{1k_1}, \ldots, \delta_{k_r} T^{-1}_{k_r} S^{-1}_{1k_r})^T. \qquad (44)$$

Из условия (44), Замечания 3 и оценки (36) следует (32). Пусть $\Psi(\tau)$ фундаментальная матрица системы (42), замкнутая управлением (43). Очевидно, что элементами матрицы $\Psi(\tau)$ являются экспоненты с отрицательными показателями и их производные:

$$\|\Psi(\tau)\| \leqslant \tilde{K}e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \quad \|\Psi(\tau)\Psi^{-1}(t)\| \leqslant \tilde{K}e^{-\lambda(\tau-t)}, \quad \tau \geqslant t.$$

Рассмотрим систему (31), замкнутую управлением (32), (44)

$$\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} = C(\tau)\bar{c}^{(4n)}, \quad C(\tau) = \bar{P}(\tau) + \bar{Q}(\tau)M(\tau). \qquad (45)$$

Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $T(\tau)$, где на ее диагонали стоят матрицы T_{k_i}, $i = 1, \ldots, r$. С учетом (38) и (41) фундаментальная матрица $\Phi(\tau)$, $\Phi^{-1}(0) = E$ (E — единичная матрица) системы (45) имеет вид

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)T^{-1}(0)S^{-1}_1(0). \qquad (46)$$

На основании (36), (46), структуры $S_1(\tau)$: $\|S_1(\tau)\| = O(e^{-\alpha\tau})$, $\tau \to \infty$, и Замечания 3 имеем

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\tau)\| \leqslant Ke^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \\ &\|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| \leqslant Ke^{-\lambda(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \quad \tau \geqslant t, \end{aligned} \qquad (47)$$

$$K > 0, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Лемма доказана.

1.4 Доказательство теоремы

Система (26), замкнутая управлением (32), (44) имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} = C(\tau)\bar{c}^{(4n)} + \bar{R}_1(c^{(4n)}, d, \tau) + \bar{R}_2(c^{(4n)}, d, \tau) + \\
+ \bar{R}_3(c^{(4n)}, d, \tau) + \bar{R}_4(c^{(4n)}, d, \tau).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Выполним в системе (48) замену переменной по формуле

$$
\begin{aligned}
\bar{c}^{(4n)} = ze^{-n\alpha\tau}, \quad \bar{c}^{(4n)}(0) = z(0), z = (z_1, z_2)^T, \\
c^{(4n)} = z_1 e^{-n\alpha\tau}, \quad d = z_2 e^{-n\alpha\tau}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

В результате получим систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{d\tau} = Dz + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_1(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}\bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}\bar{R}_4(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau), \\
&D(\tau) = C(\tau) + n\alpha E.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Пусть $\Phi_1(\tau)$ фундаментальная матрица линейной части системы (50). Тогда из (47) и (49) следуют оценки

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_1(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}, \quad \|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leqslant Ke^{-\beta(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \\
\beta = \lambda - n\alpha, \quad \tau \geqslant t.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы $\beta > 0$. Решение системы (50) с начальным данными (49), (27), (23) имеет вид

$$
\begin{aligned}
z(\tau) &= \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1) + \\
&+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
&+ \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
&+ \bar{r}_4(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t)]dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty).
\end{aligned}
\tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
&z(\tau) = \Phi_1(\tau)\bar{c}^{(4n)}(0)+\\
&\quad + \int\limits_0^\tau \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t)+\\
&\quad + \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t)+\\
&\quad + \bar{R}_4(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t)]dt, \quad \tau \in [0, \tau_1].
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Из (52) и (53) и условий (30) и (51) в области (5), (27) справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\beta(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\|+\\
&+ \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}K\left(\bar{L}e^{-\alpha t}\|z(t)\| + L_4(F)e^{-2n\alpha t}\right)dt,\\
&\tau \in [\tau_1, \infty),
\end{aligned}
\tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}\|c^{(4n)}(0)\|+\\
&+ \int_{0}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}K\left(\bar{L}e^{-\alpha t}\|z(t)\| + L_4(F)e^{-2n\alpha t}\right)dt,\\
&\tau \in [0, \tau_1],
\end{aligned}
\tag{55}
$$

где $\bar{K} = Ke^{(n-1)\alpha\tau_1}$, $\bar{L} > 0$ — постоянная величина в области (5), (27). Применяя к последним двум неравенствам (54), (55) известный результат (см. [1]), получим

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\|+\\
&+ \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\mu(\tau-t)}KL_4(F)e^{-2n\alpha t}dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty),\\
&\mu = \beta - K\bar{L}e^{-\alpha\tau_1},
\end{aligned}
\tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant Ke^{\mu_1\tau}\|c^{(4n)}(0)\|+\\
&+ \int_{0}^{\tau} e^{\mu_1(\tau-t)}KL_4(F)e^{-2n\alpha t}dt, \quad \tau \in [0, \tau_1],\\
&\mu_1 = \beta - K\bar{L}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Зафиксируем $\tau_1 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство $\mu > 0$. Тогда после вычисления интеграла во вторых слагаемых правой части (56) и (57) получим

$$\begin{aligned}&\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\|+\\&+K_1L_4(F)e^{-2n\alpha\tau}, \quad \tau\in[\tau_1,\infty)\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}&\|z(\tau)\| \leqslant K\|c^{(4n)}(0)\|+K_2L_4(F),\\&\tau\in[0,\tau_1], \quad K_i>0, \quad i=1,2.\end{aligned} \tag{59}$$

В (58), (59) константы $K_i, i=1,2$ зависят от области (5), (27). Из (58) и (59), свойства функции $L_4(F)$ ($L_4(F)\to 0$ при $\|F\|\to 0$) и формулы (23) следует, что можно выбрать $\bar{\varepsilon}_2>0$ так, чтобы $\forall \bar{x}, F$: $\|\bar{x}\|\leqslant\bar{\varepsilon}_2, \|F\|\leqslant\bar{\varepsilon}_2$ функция $z(\tau)$ будет экспоненциально убывать и принадлежать области (5), (27). Используя формулы (49), (32), получим известные функции $\bar{c}^{(4n)}(\tau)$, $v(\tau)$. Вторая компонента f $\bar{c}^{(4n)}(\tau)$ даст известные функции $d(\tau)$. При этом, согласно (58), (49) имеет место оценка

$$\|\bar{c}^{(4n)}(\tau)\|\leqslant K_3e^{-3n\alpha\tau} \quad \tau\in[0,\infty), K_3>0. \tag{60}$$

В (60) константы K_3 зависят от области (5), (27).

Используя функцию $d(\tau)$ с формулой (33), получим известную функцию $\bar{d}(\tau)$. Рассмотрим систему (26), замкнутую найденным управлением $v(\tau)$ при условии, что в правую часть ее первых n уравнений подставлена функция $\bar{d}(\tau)$, определенная функцией (33), а в правую часть последних r уравнений подставлена найденная функция $v(\tau)$ на промежутке $[kh,(k+1)h), k=0,1,\dots$. Ее можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau}=C\bar{c}^{(4n)}+\bar{\bar{Q}}(\bar{d}-d)+\bar{R}_1(c^{(4n)},\bar{d},\tau)+\\&\bar{R}_2(c^{(4n)},d,\tau)+(\bar{R}_2(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-\bar{R}_2(c^{(4n)},d,\tau))+\\&+\bar{R}_3(c^{(4n)},d,\tau)+(\bar{R}_3(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-\bar{R}_3(c^{(4n)},d,\tau))+\\&+\bar{R}_4(c^{(4n)},\bar{d},\tau),\\&\tau\in[kh,(k+1)h), k=0,1,\dots\\&\bar{\bar{Q}}=(Q,O_4)^T_{n+r\times r}.\end{aligned} \tag{61}$$

O_4 — матрица с нулевыми элементами соответствующей размерности.

На основании теоремы о среднем справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&R_2^i(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-R_2^i(c^{(4n)},d,\tau)=((\mathrm{grad}R_2^i(c^{(4n)},\tilde{d},\tau,))^T,(\bar{d}-d))=\\
&=\left((\mathrm{grad}R_2^i(c^{(4n)},\tilde{d},\tau,))^T\ ,\ \frac{dd}{d\tau}(\tilde{\tau})h\right),\\
&R_3^i(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-R_3^i(c^{(4n)},d,\tau)=((\mathrm{grad}R_3^i(c^{(4n)},\tilde{d},\tau,))^T,(\bar{d}-d))=\\
&=\left((\mathrm{grad}R_3^i(c^{(4n)},\tilde{d},\tau,))^T\ ,\ \frac{dd}{d\tau}(\tilde{\tau})h\right),\\
&\tilde{d}=\bar{d}+\tilde{\theta}_i(\bar{d}-d),\tilde{\theta}_i\in[0,1],\ i=1,\ldots,n,\\
&\tilde{\tau}=kh+\tilde{\tilde{\theta}}_ih,\tilde{\tilde{\theta}}_i\in[0,1],k=0,1,\ldots,i=1,\ldots,r.
\end{aligned}\tag{62}$$

Далее из условий (24), (32), (60) в области (5), (27) следуют оценки

$$\begin{aligned}
&\|\upsilon(\tilde{\tau})\|=\left\|\frac{dd}{d\tau}(\tilde{\tau})\right\|\leqslant\|M(\tilde{\tau})\|\|\bar{c}^{(4n)}(\tilde{\tau})\|\leqslant K_4e^{-2n\alpha\tilde{\tau}}=\\
&=K_4e^{-2n\alpha\tau}e^{2n\alpha(\tau-\tilde{\tau})}=K_4e^{-2n\alpha\tau}e^{2n\alpha h}=K_5e^{-2n\alpha\tau},
\end{aligned}\tag{63}$$

$$K_5>0,\quad K_5=K_4e^{2n\alpha h},\quad \tilde{\tau}\in[kh,(k+1)h],\quad \tau\in[kh,(k+1)h].$$

В (63) константа K_5 зависит от области (5), (27), но не зависит от номера k.

В результате условий (62) и (63) получим

$$\begin{aligned}
&\|\bar{d}-d\|\leqslant K_6e^{-2n\alpha\tau}h,K_6>0,\\
&\|R_2(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-R_2(c^{(4n)},d,\tau)\|\leqslant K_7e^{-2n\alpha\tau}h,K_7>0,\\
&\|R_3(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-R_2(c^{(4n)},d,\tau)\|\leqslant K_8e^{-2n\alpha\tau}h,K_8>0,\\
&\tau\in[kh,(k+1)h],k=0,1,\ldots
\end{aligned}\tag{64}$$

В (64) константы K_6,K_7,K_8 зависят от области (5), (27), но не зависят от k. Покажем, что решения системы (61), начинающиеся в достаточно малой окрестности начала координат, экспоненциально убывают. Выполним в системе (61) замену переменной $\bar{c}^{(4n)}$ по формуле (49). В результате получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{d\tau} = Dz + e^{n\alpha\tau}\bar{\bar{Q}}(\bar{d} - d) + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_1(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) + \\
&+ \bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + e^{n\alpha\tau}(\bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \\
&- \bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}(\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}\bar{R}_4(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau), \\
&d(\tau) = z_2 e^{-n\alpha\tau}, \bar{d}(\tau) = z_2(kh)e^{-n\alpha kh}, \tau \in [kh, (k+1)h], \\
&k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Решение системы (65) с начальными данными (49), (27), (23) имеет вид

$$
\begin{aligned}
z(\tau) = {} & \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(kh)z(kh) + \\
&+ \int\limits_{kh}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{\bar{Q}}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
&+ \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + (\bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \\
&- \bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
&+ (\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + \\
&+ \bar{R}_4(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t)]dt, \quad \tau \in [kh, (k+1)h],
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
z(\tau) = {} & \Phi_1(\tau)\bar{c}^{(4n)}(0) + \\
&+ \int\limits_{0}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{\bar{Q}}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
&+ \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + (\bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \\
&- \bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
&+ (\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + \\
&+ \bar{R}_4(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t)]dt, \quad \tau \in [0, kh].
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Из (66), (67) с учетом (64), (63), (60), (51),(27) (30) получим оценки

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant \overline{K}e^{-\beta(\tau-kh)}\|z(kh)\|+\\
&+K\int\limits_{kh}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}(\bar{L}\|z\|+L_4(F)+K_9h)e^{-\alpha t}dt,\\
&\tau\in[kh,(k+1)h],\ \overline{K}=Ke^{(n-1)\alpha kh},
\end{aligned}
\tag{68}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}\|c^{(4n)}(0)\|+\\
&+K\int\limits_{0}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}(\bar{L}\|z\|+L_4(F)+K_9h)e^{-\alpha t}dt,\\
&\tau\in[0,kh],\ \overline{K}=Ke^{(n-1)\alpha kh}.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Применяя к (72), (73) известный результат [1] получим оценки

$$
\begin{gathered}
\|z(\tau)\| \leqslant \overline{K}e^{-\mu(\tau-kh)}\|z(kh)\|+K\int\limits_{kh}^{\tau} e^{-\mu(\tau-t)}(L_4(F)+K_9h)e^{-\alpha t}dt,\\
\tau\in[kh,(k+1)h],\quad \mu=\beta-K\bar{L}e^{-\alpha kh}.
\end{gathered}
\tag{70}
$$

$$
\begin{gathered}
\|z(\tau)\| \leqslant Ke^{-\mu_1\tau}\|c^{(4n)}(0)\|+K\int\limits_{0}^{\tau} e^{-\mu_1(\tau-t)}(L_4(F)+K_9h)e^{-\alpha t}dt,\\
\tau\in[0,kh],\quad \mu_1=\beta-K\bar{L}.
\end{gathered}
\tag{71}
$$

Зафиксируем $k=k_1$ так, чтобы было выполнено неравенство $\mu>0$. Тогда после вычисления интегралов во вторых слагаемых правой части (70) и (71) получим

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant \overline{K}e^{-\mu(\tau-k_1h)}\|z(k_1h)\|+K_{10}(L_4(F)+h)e^{-\alpha\tau},\\
&\tau\in[k_1h,(k_1+1)h],
\end{aligned}
\tag{72}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|z(\tau)\| \leqslant K\|\bar{c}^{(4n)}(0)\|+K_{11}(L_4(F)+h),\\
&\tau\in[0,k_1h], K_i>0, i=10,11.
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Константы $K_i, i = 10, 11$ зависят от области (5), (27) и не зависят от номера k интервала .

Из (72), (73), свойства функции $L_4(F)$ и формулы (23) следует, что можно выбрать $\bar{\bar{\varepsilon}}_2 : 0 < \bar{\bar{\varepsilon}}_2 < \bar{\varepsilon}_1$ так, чтобы

$$\forall \bar{x}, F, h : \|\bar{x}\| \leqslant \bar{\bar{\varepsilon}}_2, \|F\| \leqslant \bar{\bar{\varepsilon}}_2, 0 < h < \bar{\bar{\varepsilon}}_2$$

функция $z(\tau)$ на полуоси $\tau \in [kh, \infty)$, $k > k_1$, будет экспоненциально убывать и принадлежать области (5), (27). Подстановка (66), (67) в формулу (49) даст известную функцию $\bar{c}^{(4n)}(\tau)$, $\upsilon(\tau)$. Возвращаясь в первой компоненте функции $\bar{c}^{(4n)}$ к исходной переменной c по формулам (20), (17), (14) получим известную функцию $c(\tau)$. В силу построения систем (61), (26), (21) указанная функция удовлетворяет системе (9), при условии, что в правую часть системы (9) подставлена известная функция $\bar{d}(\tau)$. Согласно (72), (49), (23), (20), (19), (17), (16) и (14) функция $c(\tau)$ удовлетворяет граничным условиям (11). Отсюда следует, что пара $c(\tau), \bar{d}(\tau)$ является решением Задачи 2. Если перейти в найденных функциях к исходной независимой переменной t, используя формулы (8), (10) (34), то получим известные функции $x(t) = c(\tau(t))$, $\bar{u}(t) = \bar{d}(\tau(t))$ и $\bar{\upsilon}(t) = \upsilon(\tau(t))$, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \bar{u}) + F, \\ \dot{u} &= (1-t)^{-1}\bar{\upsilon}(t), \end{aligned} \tag{74}$$

$$x(0) = \bar{x}, \quad u(0) = 0,$$

$$\bar{u}(t) = u(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \ldots$$

Из построения системы (74) и условий (11), (10), (8) видно, что найденная пара функций $x(t), \bar{u}(t)$ удовлетворяет системе (1) и условиям (7). Отсюда следует, что переход к пределу при $t \to 1$ в найденных функциях $x(t), \bar{u}(t)$ дает искомое решение Задачи 1. При этом моменты времени t_k, фигурирующие в определении дискретного управления, находятся по формуле (34).

Алгоритм решения поставленных Задач 1 и 2 состоит из следующих этапов:

1. Построение вспомогательной системы (26). Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

2. Решение задачи стабилизации системы (31). Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

3. Решение задачи Коши для системы (26) с начальными данными (27) ($\forall \bar{x}, F \ : \ \|\bar{x}\| \ < \ \bar{\bar{\varepsilon}}_2, \|F\| \ < \ \bar{\bar{\varepsilon}}_2$), замкнутым стабилизирующим управлением $v(\tau) = M(\tau)\bar{c}^{(4n)}$, полученным в п.2 . В результате запишем известные функции $\bar{c}^{(4n)}(\tau) = (c^{(4n)}(\tau), d(\tau)), v(\tau)$. Выполняется численными методами. Используя известную функцию с помощью формул (2.14),(2.11),(2.8) получим известную пару функций . Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

4. При $h : 0 < h < \bar{\bar{\varepsilon}}_2$ строим функцию

$$\bar{d}(\tau) = d(kh), \tau \in [kh, (k+1)h), \ k = 0, 1, \ldots$$

   Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

5. Решение задачи Коши для системы (9), (24) с начальными условиями (11), (25) после подстановки в ее правую часть функции $\bar{d}(\tau)$, найденной в пункте 4. В результате будем иметь абсолютно непрерывную функцию $c(\tau)$ и кусочно-постоянную функцию $\bar{d}(\tau)$, являющиеся решением Задачи 2. Выполняется численными методами.

6. Используя формулы $\tau = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-t)$, $t \in [0, 1)$ и (34) получим известные функции

$$x(t), \ \bar{u}(t) = u(t_k), \ t \in [t_k, t_{k+1}), \ k = 0, 1, \ldots,$$

   являющиеся решением поставленной задачи (1), (6). Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры являющиеся решением поставленной задачи.

1.5 Решение задачи управления однозвенным манипулятором в классе дискретных управлений.

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу управления однозвенным роботом-манипулятором при переносе груза в заданную точку. В соответствии с [9], система уравнений, описывающая движение манипулятора с учетом возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2 + u + F, \end{aligned}$$

где x_1 — угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 — скорость изменения угла отклонения, $a_1 = \bar{\alpha} L^{-2} m_1^{-1}$, $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$, $a_2 = g L^{-1} \left(m_0 + \frac{M}{2}\right) m_1^{-1}$, M —масса манипулятора, L — длина манипулятора, g — ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ — коэффициент трения, m_0 — масса переносимого груза, F — возмущение, $x = (x_1, x_2)^T$, управление u скалярно. Рассмотрим граничные условия

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(1) = 0.$$

Вспомогательная система (9) и начальные условия (10) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \\ \frac{dc_2}{d\tau} &= -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2 + \\ &\quad + \alpha e^{-\alpha\tau} d + \alpha e^{-\alpha\tau} F, \\ \frac{dd}{d\tau} &= v \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} &c_1(0) = \bar{x}_1, \quad c_2(0) = \bar{x}_2, \quad d(0) = 0, \\ &c_i(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{76}$$

Для решения задачи (75), (76) выполним замены переменных по формулам

$$c_2(\tau) = c_2^{(1)}(\tau) - e^{-\alpha\tau}F,$$
$$c_1(\tau) = c_1^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2}Fe^{-2\alpha\tau},$$
$$c_2^{(1)}(\tau) = c_2^{(2)}(\tau) + \frac{1}{2}Fa_1e^{-2\alpha\tau}.$$

В результате аналог системы (21), (24) примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dc_1^{(1)}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}c_2^{(2)} - \frac{1}{2}\alpha a_1 Fe^{-3\alpha\tau},\\
&\frac{dc_2^{(2)}}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau}a_2\sin(c_1^{(1)} + \frac{1}{2}Fe^{-2\alpha\tau}) - \alpha e^{-\alpha\tau}a_1c_2^{(2)} +\\
&\qquad + \alpha e^{-\alpha\tau}d + \frac{1}{2}\alpha e^{-3\alpha\tau}a_1F,\\
&\frac{dd}{d\tau} = \upsilon.
\end{aligned} \tag{77}$$

Линейная часть системы (77) может быть записана в форме

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c} + \bar{Q}\upsilon, \quad \bar{c} = (c_1^{(1)}, c_2^{(2)}, d)^T, \tag{78}$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & 0\\ -\alpha e^{-\alpha\tau}a_2 & -\alpha e^{-\alpha\tau}a_1 & \alpha e^{-\alpha\tau}\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы S, $S^{-1}(\bar{P}S - \frac{dS}{d\tau})$, T, δ имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2e^{-2\alpha\tau}\\ 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & -\alpha^2e^{-2\alpha\tau}a_1 + \alpha^2e^{-\alpha\tau}\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{S} = S^{-1}\left(\bar{P}S - \frac{dS}{d\tau}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_1(\tau)\\ 1 & 0 & \varphi_2(\tau)\\ 0 & 1 & \varphi_3(\tau) \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\tau) = 0,\\
&\varphi_2(\tau) = -\alpha^2(-e^{-\alpha\tau}a_1 + e^{-2\alpha\tau}a_2 + 2),\\
&\varphi_3(\tau) = -\alpha(e^{-\alpha\tau}a_1 - 3),
\end{aligned}
$$

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_3(\tau) & -\left(\frac{d\varphi_3(\tau)}{d\tau} + \varphi_2(\tau)\right) \\ 0 & 1 & -\varphi_3(\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
\delta = (\delta_2, \delta_1, \delta_0),
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_2 = (-\gamma_2 - \varphi_3),\\
&\delta_1 = (-\gamma_1 - \frac{d\varphi_3}{d\tau} - \varphi_2),\\
&\delta_0 = (-\gamma_0 - \frac{d^2\varphi_3}{d\tau} - \frac{d\varphi_2}{d\tau}\varphi_3).
\end{aligned}
$$

где $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_0$ выбраны так, чтобы корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения $\lambda^3 + q_2\lambda^2 + q_1^\lambda + q_0$ лежали в левой полуплоскости. Пусть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. Тогда $q_2 = 6$, $q_1 = 11$, $q_0 = 6$. Используя матрицы S, $\bar{S}$, T и формулу (44) получим закон управления

$$
\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{c}, \tag{79}
$$
$$
M(\tau) = \delta T^{-1} S^{-1},
$$

где

$$
\begin{aligned}
&M(\tau) = (m_1(\tau), m_2(\tau), m_3(\tau)),\\
&m_1(\tau) = -\frac{1}{\alpha^2}e^{2\alpha\tau}(e^{-3\alpha\tau}a_1a_2\alpha^3 - 3e^{-2\alpha\tau}a_2\alpha^3 - 6e^{-2\alpha\tau}a_2\alpha^2 +\\
&+ 8\alpha^3 + 24\alpha^2 + 22\alpha + 6),\\
&m_2(\tau) = -\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\tau}(e^{-\alpha\tau}a_1^2\alpha^2 - e^{-2\alpha\tau}a_2\alpha^2 - 3e^{-\alpha\tau}a_1\alpha^2 -\\
&- 6e^{-\alpha\tau}a_1\alpha + 7\alpha^2 + 18\alpha + 11),\\
&m_3(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}a_1 - 3\alpha - 6,
\end{aligned} \tag{80}
$$

который обеспечивает стабилизацию системы (78). Далее решаем задачу Коши (77) для системы (80) с начальными данными

$$
c_1^{(1)}(0) = \bar{x}_1 - \frac{1}{2}F, \quad c_2^{(2)}(0) = \bar{x}_2 + \frac{1}{2}F, \quad d(0) = 0.
$$

В результате получим известную функцию $\upsilon(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty)$, которая в свою очередь дает дискретное управление $\bar{\upsilon}(t) = \upsilon(\tau(t))$. На заключительном этапе находим решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2, \\
\dot{x_2} &= -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2 + \bar{u} + F, \\
\dot{u} &= (1-t)^{-1} \bar{\upsilon}(t)
\end{aligned}$$

на промежутке $[0, 1]$ с начальными данными

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad u(0) = 0.$$

$$\bar{u} = u(t_k),\ t \in [t_k, t_{k+1}),\ t_k = 1 - e^{-\alpha k h},\ k = 0, 1, \ldots$$

В процессе численного моделирования находилось решение Задачи 2 при $\bar{x}_1 = -0.5$ рад, $\bar{x}_2 = -0.8$ рад/сек, $\bar{\alpha} = 0.1$, $\alpha = 0.25$, $L = 10$ m, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $\varepsilon_1 = 0.001$, $\varepsilon_2 = 0.01$, $F = 0.1$, $h = 0.01$. На рисунке 1.1 представлены графики соответствующих функций фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$.

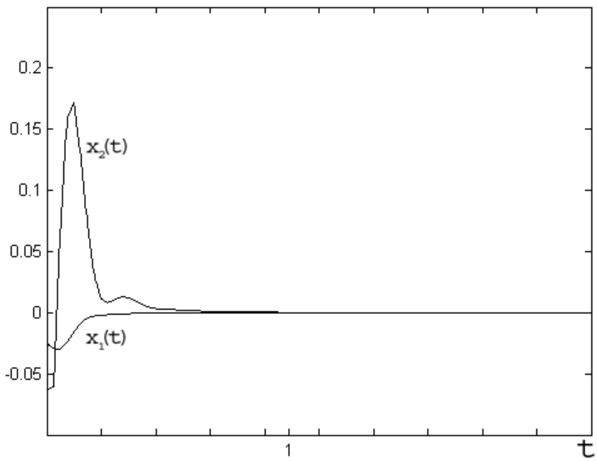

Рис. 1.1.

§2. Решение задачи стабилизации для нелинейных нестационарных управляемых систем с учетом возмущений

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u, t) + \mu F(t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $x \in R^n$, $u = (u_1, \ldots, u_r)^T$, $u \in R^r$, $r \leqslant n$, $t \in [0, 1]$, $\mu \in R^1$;

$$f \in C^{4n-1}(R^n \times R^r \times R^1; R^n), \quad F(t) \in C^{(4n-1)}([0,1], R^n), \tag{2}$$

$$f(0, 0, t) \equiv 0, \tag{3}$$

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1),$$

$$B_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, 1), \quad S = (B_0, A_0 B_0, \ldots, A_0^{n-1} B_0),$$

$$\text{rank } S = n. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$A_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} f}{\partial x \partial t^i}(0, 0, 1), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$B_i = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^{i+1} f}{\partial u \partial t^i}(0, 0, 1), \quad i = 1, \ldots, 2n-1,$$

$$A = \alpha e^{-\alpha\tau} A_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau} A_1 + \ldots + \alpha e^{-n\alpha\tau} A_{n-1},$$
$$B = \alpha e^{-\alpha\tau} B_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau} B_1 + \ldots + \alpha e^{-2n\alpha\tau} B_{2n-1},$$

здесь $\alpha > 0$, $\tau \in [0, \infty)$. Рассмотрим пространство $L(\tau)$, образованное линейными комбинациями столбцов матриц $L_1(\tau), L_2(\tau), \ldots, L_n(\tau)$, где

$$L_1(\tau) = B(\tau),\ L_i(\tau) = A(\tau) L_{i-1}(\tau) - \frac{dL_{i-1}}{d\tau},\ i = 2, \ldots, n.$$

Предположим, что

$$\dim L(\tau) = n, \quad \tau \in [0, \infty), \alpha > 0, \tag{5}$$

$$\|u\| \leqslant N, N > 0. \tag{6}$$

Задача 1. Найти пару функций $x(t) \in C[0,1]$, $u(t) \in C[0,1]$, удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = 0, \quad x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)^T. \tag{7}$$

Указанную пару функций $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (7).

Теорема. *Пусть для правой части системы* (1) *выполнены условия* (2)–(5). *Тогда существует* $\bar{\varepsilon} > 0$, $\mu_0 > 0$, *такое что* $\forall x_0 \in R^n$, $\forall \mu \in R^1$, $\|x_0\| < \bar{\varepsilon}$, $|\mu| < \mu_0$ *решение задачи (1),(7) может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Главная идея доказательства утверждения состоит в том, что посредством преобразований зависимых и независимых переменных, решение исходной задачи сводится к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится синтезирующее управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части вспомогательной системы. На заключительном этапе осуществляется переход к исходным переменным.

2.1 Построение вспомогательной системы

Рассмотрим задачу: найти пару функций

$$x(t) \in C[0,1], \ u(t) \in C[0,1],$$

удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \to 0, \quad \text{при} \quad t \to 1. \tag{8}$$

Эту пару функций будем называть решение задачи (1), (8). Переходя к пределу в решении задачи (1), (8) при $t \to 1$ получим решение задачи (1), (7). Сделаем в системе (1) преобразование независимой переменной:

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, \infty), \tag{9}$$

где $\alpha > 0$ некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной система (1) и условия (8) примут вид:

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f(c, d, t(\tau)) + \alpha e^{-\alpha\tau} F(1 - e^{-\alpha\tau}), \tag{10}$$

$$c(0) = x_0, \quad c(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \tag{11}$$

$$c(\tau) = x(t(\tau)), \quad d(\tau) = u(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{12}$$

$$c = (c_1, \ldots, c_n)^T, \quad d = (d_1, \ldots, d_r)^T.$$

Пару функций $c(\tau)$, $d(\tau)$, удовлетворяющую системе (10) и условиям (11) будем называть решением задачи (10), (11). Имея решение задач (10), (11), с помощью формул (12), (9) можно получить решение задача (1), (8). Введем обозначения

$$\tilde{c} = \theta_i c, \quad \tilde{d} = \theta_i d, \quad \tilde{t} = 1 + \theta_i(t - 1), \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{r} m_i,$$

$$k! = k_1! \ldots k_n!, \quad m! = m_1! \ldots m_r!$$

Если, используя свойства (2), (3), разложить правую часть системы (1) в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0, 1)$, систему (10) можно записать в виде

$$
\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0,1)d_j +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1)c_j c_k + \right.
$$

$$
+ 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(0,0,1)c_j d_k + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0,1)d_j d_k -
$$

$$
\left. -2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_j}(0,0,1)c_j - 2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial u_j}(0,0,1)d_j \right) +
$$

$$
+ \cdots + \alpha e^{-\alpha\tau} \times
$$

$$
\times \sum_{|k|+|m|+l=4n-2} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} f_i(0,0,1)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l} \times
$$

$$
\times c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \alpha e^{-\alpha\tau} \times \tag{13}
$$

$$
\times \sum_{|k|+|m|+l=4n-1} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} f_i(\tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{t}(\tau))}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l} \times
$$

$$
\times c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \dots d_r^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} +
$$

$$
+ \mu\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{k=0}^{4n-2} \frac{1}{k!} \frac{d^k F_i}{dt^k}(1)(-1)^k e^{-k\alpha\tau} + \cdots +
$$

$$
+ \mu\alpha e^{-4n\alpha\tau} \frac{1}{(4n-1)!} \frac{d^{4n-1} F_i}{dt^{4n-1}}(\tilde{t}(\tau)), i = 1, \dots, n.
$$

$$
\tilde{t}(\tau) = 1 - \theta_i e^{-\alpha\tau}, \quad \theta_i \in [0,1], \quad i = 1, \dots, n.
$$

Пусть область изменения $c(\tau)$ ограничена неравенством

$$
||c(\tau)|| < C_1, \quad |\mu| < \mu_1, \quad C_1 > 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \tau \in [0, +\infty). \tag{14}
$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций $c_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент c и d в области (6), (14) удовлетворяли оценке $O(e^{-4n\alpha\tau}\|\mu\|)$ при $|\mu| \to 0$, $\tau \to \infty$. На первом этапе выполним замену $c_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^{(1)} - \mu e^{-\alpha\tau} F_i(1), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|+l} f_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|+l} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r} \partial t^l},$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

После подстановки (15) в левую и правую части системы (13), с учетом введенного обозначения получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} &= -\mu\alpha e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1) F_j(1) + \\
&+ \mu\alpha e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t}(0,0,1) F_j(1) + \\
&+ \frac{1}{2}\mu^2 \alpha e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1) F_j(1) F_k(1) + \\
&+ \alpha \Bigg(e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1) c_j^{(1)} - \\
&- \mu e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1) F_k(1) c_j^{(1)} \Bigg) - \\
&- \alpha e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t}(0,0,1) c_j^{(1)} - \alpha e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial t}(0,0,1) d_j +
\end{aligned} \tag{16}$$

$$+\alpha\left(e^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(0,0,1)d_k -\right.$$

$$\left.-\mu e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k\partial x_j}(0,0,1)F_j(1)d_k\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0,1)c_j^{(1)}c_k^{(1)}+$$

$$+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(0,0,1)d_k c_j^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(0,0,1)d_j d_k+\cdots+\alpha e^{-\alpha\tau}\times$$

$$\times\sum_{|k|+|m|+l=4n-2}\frac{1}{k!m!l!}D^{|k|+|m|+l}f_i(0,0,1)(c_1^{(1)}-\mu e^{-\alpha\tau}F_1(1))^{k_1}\times$$

$$(c_2^{(1)}-\mu e^{-\alpha\tau}F_2(1))^{k_2}\times\cdots\times(c_n^{(1)}-\mu e^{-\alpha\tau}F_n(1))^{k_n}\times$$

$$\times d_1^{m_1}d_2^{m_2}\ldots d_r^{m_r}(-1)^l e^{-l\alpha\tau}+\alpha e^{-\alpha\tau}\times$$

$$\times\sum_{|k|+|m|+l=4n-1}\frac{1}{k!m!l!}D^{|k|+|m|+l}f_i(\tilde{c},\tilde{d},\tilde{t}(\tau))(c_1^{(1)}-\mu e^{-\alpha\tau}F_1(1)^{k_1})\times$$

$$\times(c_2^{(1)}-\mu e^{-\alpha\tau}F_2(1)^{k_2})\cdots\times(c_n^{(1)}-\mu e^{-\alpha\tau}F_n(1))^{k_n}\times$$

$$\times d_1^{m_1}d_2^{m_2}\ldots d_r^{m_r}(-1)^l e^{-l\alpha\tau}+$$

$$+\alpha\mu\sum_{k=1}^{4n-2}\frac{1}{k!}\frac{d^kF_i}{dt^k}(-1)^k e^{-(k+1)\alpha\tau}-\mu\alpha\frac{1}{(4n-1)!}\frac{d^{4n-1}F_i}{dt^{4n-1}}(\tilde{t})e^{-4n\alpha\tau},$$

$i=1,\ldots,n.$

Из (11), (15) следует, что

$$c_i^{(1)}(0)=x_0^i+\mu F_i(1),\quad i=1,\ldots,n. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (16) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $c^{(1)}$ и d, в области (6), (14) удовлетворяют условию $O(e^{-2\alpha\tau}\mu)$ при $\mu\to 0$, $\tau\to\infty$.

На втором этапе сделаем замену

$$c_i^{(1)}(\tau) = c_i^{(2)} + \frac{1}{2}\mu e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1)F_j + \frac{1}{2}\mu e^{-2\alpha\tau}\frac{dF}{dt}(1) =$$

$$= c_i^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_i^{(2)}(\mu),$$

$$\varphi_i^{(2)}(\mu) = \frac{1}{2}\mu\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1)F_j(1) + \frac{1}{2}\mu\frac{dF}{dt}(1), \varphi_i^{(2)}(0) = 0, \tag{18}$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

В результате в новых переменных система (16) и начальные условия (17) примут вид

$$\frac{dc_i^{(2)}}{d\tau} = \frac{1}{2}\alpha\mu^2 e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0,1)F_j(1)F_k(1)+$$

$$+\alpha\mu e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial t}(0,0,1)F_j(1)+$$

$$+\alpha e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1)\varphi_j^{(2)}(\mu)-$$

$$-\alpha e^{-4\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0,1)F_k(1)\varphi_j^{(2)}(\mu)-$$

$$-\alpha e^{-4\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial t}(0,0,1)\varphi_j^{(2)}(\mu)+ \tag{19}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-5\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0,1)\varphi_j^{(2)}(\mu)\varphi_k^{(2)}(\mu)+$$

$$+\alpha\left(e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0,1)c_j^{(2)}-\right.$$

$$- e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0,1)F_k(1)c_j^{(2)} -$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t}(0,0,1)c_j^{(2)} + \\
&+ e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1)\varphi_k^{(2)}(\mu)c_j^{(2)}\Bigg) + \\
&+ \alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(0,0,1)d_k - e^{-2\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(0,0,1)F_k(1)d_k - \\
&- e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t}(0,0,1)c_j^{(2)} + \\
&+ e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial x_k}(0,0,1)\varphi_k^{(2)}(\mu)d_k) + \\
&+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0,1)c_k^{(2)}c_j^{(2)} + \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(0,0,1)d_k c_j^{(2)} + \\
&+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0,1)d_j d_k + \cdots + \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=4n-2}\frac{1}{k!m!l!}D^{|k|+|m|+l}f_i(0,0,1)\times \\
&\times (c_1^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_1^{(2)} - \mu e^{-\alpha\tau}F_1(1))^{k_1}(c_2^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_2^{(2)} - \mu e^{-\alpha\tau}F_2(1))^{k_2}\times \\
&\times \cdots \times (c_n^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_n^{(2)} - \mu e^{-\alpha\tau}F_n(1))^{k_n}d_1^{m_1}d_2^{m_2}\ldots d_r^{m_r} + \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=4n-1}\frac{1}{k!m!l!}D^{|k|+|m|+l}f_i(\tilde{c},\tilde{d})\times \\
&(c_1^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_1^{(2)} - \mu e^{-\alpha\tau}F_1(1))^{k_1}(c_2^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_2^{(2)} - \mu e^{-\alpha\tau}F_2(1))^{k_2}\times \\
&\times \cdots \times (c_n^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_n^{(2)} - \mu e^{-\alpha\tau}F_n(1))^{k_n}d_1^{m_1}d_2^{m_2}\ldots d_r^{m_r} + \\
&+ \alpha\mu\sum_{k=2}^{4n-2}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}F_i(1)(-1)^k e^{-(k+1)\alpha\tau} - \mu\alpha\frac{1}{(4n-1)!}\frac{d^{4n-1}F_i}{dt^{4n-1}}(\tilde{t})e^{-4n\alpha\tau}, \\
&i = 1,\ldots,n,
\end{aligned}
$$

$$c_i^{(2)}(0) = x_0^i + \mu F_i(1) - \varphi_i^{(2)}(\mu), \quad \varphi_i^{(2)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

В отличие от предыдущей замены в правой части системы (19) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $c^{(2)}$ и d в области (6), (14) удовлетворяют условию $O(e^{-3\alpha\tau}|\mu|)$ при $\tau \to \infty$, $|\mu| \to 0$. Используя (15), (18) и индуктивный переход на k-ом шаге получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)}(\tau) = c_i^{(k)}(\tau) + e^{-k\alpha\tau}\varphi_i^{(k)}(\mu), \quad \varphi_i^{(k)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Если применить преобразования (21) $4n-1$ раз, объединить слагаемые в полученной системе линейные по компонентам вектора $c^{(4n-1)}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, n$, а также слагаемые линейные по компонентам вектора d и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, 2n$, то согласно (16)–(20) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = {} & Pc^{(4n-1)} + Qd + R_1(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \\ & + R_2(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + R_3(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau) + \\ & + R_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} & R_1 = (R_1^1, \ldots, R_1^n)^T,\ R_2 = (R_2^1, \ldots, R_2^n)^T, \\ & R_3 = (R_3^1, \ldots, R_3^n)^T,\ R_4 = (R_4^1, \ldots, R_4^n)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mu) = {} & \alpha(e^{-\alpha\tau}A_0 + e^{-2\alpha\tau}A_1 + \cdots + e^{-n\alpha\tau}A_{n-1} + \\ & + e^{-2\alpha\tau}\bar{A}_1(\mu) + \cdots + e^{-n\alpha\tau}\bar{A}_{n-1}(\mu)), \\ Q(\mu) = {} & \alpha(e^{-\alpha\tau}B_0 + e^{-2\alpha\tau}B_1 + \cdots + e^{-2n\alpha\tau}B_{2n-1} + \\ & + e^{-2\alpha\tau}\bar{B}_1(\mu) + \cdots + e^{-2n\alpha\tau}\bar{B}_{2n-1}(\mu)), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} & c^{(4n-1)}(0) = x_0 + \mu F(1) - \varphi^{(2)}(\mu) - \varphi^{(3)}(\mu) - \cdots - \varphi^{(4n-1)}(\mu), \\ & \varphi^{(i)} = (\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})^T, \quad i = 1, \ldots, 4n-1, \quad \varphi^{(i)}(0) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Функции R_1^i содержат все слагаемые, которые линейно зависят от компонент вектора $c^{(4n-1)}$ с множителями $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant n+1$. Функции R_2^i содержат все слагаемые, которые линейно зависят от компонент вектора d с множителями $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant 2n+1$. В R_3^i содержатся все слагаемые нелинейные по компонентам векторов $c^{(4n-1)}$ и d. Функции R_4^i состоят из суммы слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $c^{(4n-1)}$ и d.

2.2 Оценка слагаемых правой части вспомогательной системы

Из условий (21), (3) и построения системы (22) следует, что в области (6), (14) имеют место оценки

$$||\bar{A}_i(\mu)|| \to 0, \quad ||\bar{B}_j(\mu)|| \to 0 \quad \text{при} \quad |\mu| \to 0, \tag{25}$$

$$i = 1, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, 2n-1,$$

$$\begin{aligned} ||R_1(c^{(4n-1)}, d, \tau)|| &\leqslant e^{-(n+1)\alpha\tau} L_1 ||c^{(4n-1)}||, \\ ||R_2(c^{(4n-1)}, d, \tau)|| &\leqslant e^{-(2n+1)\alpha\tau} L_2 ||d||, \end{aligned} \tag{26}$$

$$||R_3(c^{(4n-1)}, d, \mu, \tau)|| \leqslant e^{-\alpha\tau} L_3(||c^{(4n-1)}||^2 + ||d||^2). \tag{27}$$

Кроме того из условий (2), (3) и построения R_4 следует, что

$$||R_4(c^{(4n-1)}, d, \mu, , \tau)|| \leqslant e^{-4n\alpha\tau} L_4(\mu), L_4(\mu) \to 0 \text{ при } |\mu| \to 0. \tag{28}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = Pc^{(4n-1)} + Qd. \tag{29}$$

Лемма. *Пусть для системы (1) выполнены условия (4), (5). Тогда существует $\mu_2 > 0$, $\mu_2 < \mu_1$ такое что для всех $\mu \in R^1 : |\mu| < \mu_2$ существует управление вида $d(\tau)$*

$$d(\tau) = M(\tau)c^{(4n-1)}, \quad ||M(\tau)|| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \to \infty, \tag{30}$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (29).

2.3 Доказательство леммы

При доказательстве используем метод Н. Н. Красовского стабилизации линейных нестационарных систем. Пусть L_1^j — j-ый столбец матрицы Q, $j = 1, \ldots, r$. Построим матрицу

$$S_1 = \{L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{k_1}^1, L_1^2, \ldots, L_{k_2}^2, \ldots, L_1^r, \ldots, L_{k_r}^r\},$$
$$L_i^j = PL_{i-1}^j - \frac{dL_{i-1}^j}{d\tau},$$
$$j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j.$$

Здесь k_j, $j = 1, \ldots, r$ — максимальное количество столбцов вида $L_1^j, \ldots, l_{k_j}^j$, $j = 1, \ldots, r$ таких, что векторы $L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{k_1}^1, L_1^2, \ldots, L_{k_2}^2, \ldots, L_1^r, \ldots, L_{k_r}^r$ линейно независимы. Покажем, что

$$\operatorname{rank} S_1 = n \tag{31}$$

для достаточно малых $|\mu|$. Пусть $\bar{L}_1^j$, $j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы B. Введем в рассмотрение матрицу

$$S_2 = \{\bar{L}_1^1, \bar{L}_2^1, \ldots, \bar{L}_{k_1}^1, \bar{L}_1^2, \ldots, \bar{L}_{k_2}^2, \ldots, \bar{L}_1^r, \ldots, \bar{L}_{k_r}^r\},$$
$$\bar{L}_i^j = A\bar{L}_{i-1}^j - \frac{d\bar{L}_{i-1}^j}{d\tau}, \tag{32}$$
$$j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j,$$

где k_j, $j = 1, \ldots r$ определяются так же, как при построении матрицы S_1. Условия (2), (23), (25), (32)гарантируют, что $S_1 \to S_2$ при $\mu \to 0$. Отсюда и из условия (5) следует существование $\bar{\mu} > 0$: $\bar{\mu} < \mu_1$ такого что $\forall \mu \in R^1 : |\mu| < \bar{\mu}$, $\operatorname{rank} S_1 = \operatorname{rank} S_2 = n$. Далее пусть $\bar{\bar{L}}_1^j$, $j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы $\alpha e^{-\alpha\tau} B_0$. Рассмотрим матрицу

$$S_3 = \{\bar{\bar{L}}_1^1, \bar{\bar{L}}_2^1, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_1}^1, \bar{\bar{L}}_1^2, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_2}^2, \ldots, \bar{\bar{L}}_1^r, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_r}^r\},$$
$$\bar{\bar{L}}_i^j = \alpha e^{-\alpha\tau} A_0 \bar{\bar{L}}_{i-1}^j - \frac{d\bar{\bar{L}}_{i-1}^j}{d\tau},$$
$$j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j.$$

Рассуждая методом от противного, с учетом замечания (4) нетрудно видеть, что
$$\mathrm{rank}\ S_3 = n. \tag{33}$$
Кроме того $\|S_3^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau})$. С другой стороны
$$\begin{aligned} &A_0 + e^{-\alpha\tau}A_1 + \cdots + e^{-(n-1)\alpha\tau}A_{n-1} \to A_0 \text{ при } \tau \to \infty, \\ &B_0 + e^{-\alpha\tau}B_1 + \cdots + e^{-(2n-1)\alpha\tau}B_{2n-1} \to B_0 \text{ при } \tau \to \infty. \end{aligned} \tag{34}$$
Из структуры матриц P, Q и условий (32), (33), (34) следует оценка
$$||S_1^{-1}|| = O(e^{n\alpha\tau}). \tag{35}$$
Используя (31) выполним замену переменной $c^{(4n-1)}$ по формуле
$$c^{(4n-1)} = S_1(\tau)y. \tag{36}$$
В результате получим систему
$$\frac{dy}{d\tau} = S_1^{-1}\left(PS_1 - \frac{dS_1}{d\tau}\right)y + S_1^{-1}Qd. \tag{37}$$

Согласно [76]
$$S_1^{-1}\left(PS_1 - \frac{dS_1}{d\tau}\right) =$$
$$\{\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_{k_1}, \bar{\varphi}_{k_1}, \ldots, \bar{e}_{k_1+\cdots+k_{r-1}+2}, \bar{\varphi}_{k_r-1}, \ldots, \bar{e}_{k_1+\cdots+k_r}, \bar{\varphi}_{k_r}\},$$
где $\bar{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T_{n\times 1}$ с 1 на i-ом месте, и
$$\bar{\varphi}_{k_j} = (-\varphi^1_{k_1}, \ldots, -\varphi^{k_1}_{k_1}, \ldots, -\varphi^1_{k_j}, \ldots, -\varphi^{k_j}_{k_j}, 0, \ldots, 0)^T_{n\times 1},$$
где $-\varphi^i_{k_j}$ являются коэффициентами разложения вектора $L^j_{k_j+1}$ по векторам L^1_i, $i = 1, \ldots, k_1$; L^2_i, $i = 1, \ldots, k_2$; $\ldots$; L^j_i, $i = 1, \ldots, k_j$, $j = 1, \ldots, r$, $\sum_{j=1}^r k_j = n$. То есть
$$L^j_{k_j+1} = -\sum_{i=1}^{k_1} \varphi^i_{k_1}(\tau)L^1_i - \cdots - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi^i_{k_j}(\tau)L^j_i, \tag{38}$$

$$S_1^{-1}Q = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{k_j+1}, \dots, \bar{e}_{\gamma+1}\}, \quad \gamma = \sum_{i=1}^{r-1} k_i.$$

Рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\begin{aligned} \frac{dy_{k_j}}{d\tau} &= \{\bar{e}_2^{k_j}, \dots, \bar{e}_{k_j}^{k_j}, \bar{\bar{\varphi}}_{k_j}\} y_{k_j} + \bar{e}_1^{k_j} d_j, \quad j = 1, \dots, r, \\ y_{k_j} &= (y_{k_j}^1, \dots, y_{k_j}^{k_j})^T_{k_j \times 1}, \\ \bar{e}_i^{k_j} &= (0, \dots, 1, \dots, 0)^T_{k_j \times 1}, \end{aligned} \tag{39}$$

где 1 стоит на i-ом месте, $\bar{\bar{\varphi}}_{k_j} = (-\varphi_{k_j}^1, \dots, -\varphi_{k_j}^{k_j})^T_{k_j \times 1}$. Пусть $y_{k_j}^{k_j} = \psi$. Фазовые переменные системы (39) связаны с функцией $\psi(\tau)$ и ее производными равенствами

$$\begin{aligned} y_{k_j}^{k_j} &= \psi, \quad y_{k_j}^{k_j-1} = \psi^{(1)} + \varphi_{k_j}^{k_j}\psi, \\ y_{k_j}^{k_j-2} &= \psi^{(2)} + \varphi_{k_j}^{k_j}\psi^{(1)} + \left(\frac{d\varphi_{k_j}^{k_j}}{d\tau} + \varphi_{k_j}^{k_j-1}\right)\psi, \end{aligned}$$

$$y_{k_j}^1 = \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau)\psi^{(k_j-2)} + \dots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + r_0(\tau)\psi. \tag{40}$$

Если продифференцировать последнее равенство из (40), то из первого уравнения системы (39) получим

$$\psi^{(k_j)} + \varepsilon_{k_j-1}(\tau)\psi^{(k_j-1)} + \dots + \varepsilon_0(\tau)\psi = d_j, \quad j = 1, \dots, r. \tag{41}$$

Замечание 1. Из структуры матриц P и Q (см. (23)) и разложений (31), (38) следует, что функции $\varphi_{k_j}^{k_j}(\tau), \dots, \varphi_{k_j}^2(\tau)$, $\varphi_{k_j}^1(\tau)$, их производные и функции $r_{k_j-2}(\tau), \dots, r_1(\tau)$, $r_0(\tau)$, $\varepsilon_{k_j-1}(\tau), \dots, \varepsilon_0(\tau)$ ограничены.

Пусть

$$d_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i})\psi^{(k_j-i)}, \quad j = 1, \dots, r, \tag{42}$$

где γ_{k_j-i}, $i = 1, \dots, k_j$ выбраны так, что корни характеристических уравнений

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1} + \dots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

$\lambda_{k_j}^i$ удовлетворяли условиям

$$\begin{gathered}\lambda_{k_i}^i \neq \lambda_{k_i}^j,\ i \neq j; \quad \lambda_{k_i}^j < -(2n+1)\alpha - 1, \\ j = 1, \ldots, k_i,\ i = 1, \ldots, r.\end{gathered} \tag{43}$$

Возвращаясь в (42) к исходным переменным получим

$$d_j = \delta_{k_j} T_{k_j}^{-1} S_{1k_j}^{-1} c^{(5n-1)}, \tag{44}$$

$j = 1, \ldots, r$, $\delta_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1}, \ldots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$, T_{k_j} — матрица равенства (40), то есть $y_{k_j} = T_{k_j}\bar{\psi}$, $\bar{\psi} = (\psi^{(k_j-1)}, \ldots, \psi)^T$, $S_{1k_j}^{-1}$ — матрица, состоящая из соответствующих k_j-строк матрицы S_1^{-1}. Найденное управление можно записать в виде (30), где

$$M(\tau) = \delta_k T_k^{-1} S_{1k}^{-1} = (\delta_{k_1} T_{k_1}^{-1} S_{1k_1}^{-1}, \ldots, \delta_{k_r} T_{k_r}^{-1} S_{1k_r}^{-1})^T.$$

Обозначим через $\Psi(\tau)$ фундаментальную матрицу системы (41), замкнутую управлением (42). Очевидно, что элементами матрицы $\Psi(\tau)$ являются экспоненты с отрицательными показателями и их производные.

$$||\Psi(\tau)\Psi^{-1}(t)|| \leqslant \bar{M} e^{-\lambda(\tau - t)}, \quad \bar{M} > 0, \quad \lambda > 0.$$

Рассмотрим систему (29), замкнутую управлением (44)

$$\frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = D(\tau)c^{(4n-1)}, \quad D(\tau) = P(\tau) + Q(\tau)M(\tau). \tag{45}$$

Пусть $\Phi(\tau)$, $\Phi(0) = E$ (E — единичная матрица) будет фундаментальной матрицей системы (45). Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $T(\tau)$, где на ее диагонали стоят матрицы T_{k_i}, $i = 1, \ldots, r$. Тогда на основании (40), (36), (37) фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)T^{-1}(0)S_1^{-1}(0). \tag{46}$$

Из (46), (40), (36), структуры $S_1(\tau)$: $||S_1(\tau)|| = O(e^{-\alpha\tau})$, $\tau \to \infty$, оценки (35) и Замечания 1 следует

$$||\Phi(\tau)|| \leqslant K e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, K > 0, |\mu| < \bar{\mu}, \tag{47}$$

$$||\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)|| \leqslant K_1 e^{-\lambda(\tau-t)} e^{(n-1)\alpha t}, \quad \tau \geqslant t, \tag{48}$$

$$K > 0, \quad K_1 > 0, \quad \tau \in [0, \infty), \quad ||M(\tau)|| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \to \infty.$$

Что и доказывает справедливость утверждения леммы.

2.4 Доказательство теоремы.

Система (22) замкнутая управлением (44) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{dc^{(4n-1)}}{d\tau} = D(\tau)c^{(4n-1)}+ \\ + R_1(c^{(4n-1)}, M(\tau)c^{(4n-1)}, \mu, \tau) + R_2(c^{(4n-1)}, M(\tau)c^{(4n-1)}, \mu, \tau)+ \\ + R_3(c^{(4n-1)}, M(\tau)c^{(4n-1)}, \mu, \tau) + R_4(c^{(4n-1)}, M(\tau)c^{(4n-1)}, \mu, \tau),\end{gathered} \tag{49}$$

Выполним в системе (49) замену переменной

$$c^{(4n-1)} = z(\tau)e^{-3n\alpha\tau}, \quad c^{(4n-1)}(0) = z(0). \tag{50}$$

В результате получим систему

$$\begin{gathered}\frac{dz}{d\tau} = C(\tau)z + e^{3n\alpha\tau}R_1(e^{-3n\alpha\tau}z, M(\tau)e^{-3n\alpha\tau}z, \mu, \tau)+ \\ + e^{3n\alpha\tau}R_2(e^{-3n\alpha\tau}z, M(\tau)e^{-3n\alpha\tau}z, \mu, \tau)+ \\ + e^{3n\alpha\tau}R_3(e^{-3n\alpha\tau}z, M(\tau)e^{-3n\alpha\tau}z, \mu, \tau)+ \\ + e^{3n\alpha\tau}R_4(e^{-3n\alpha\tau}z, M(\tau)e^{-3n\alpha\tau}z, \mu, \tau), \\ C(\tau) = D(\tau) + 3n\alpha E.\end{gathered} \tag{51}$$

Покажем, что все решения системы (51) с начальными данными (50), начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля, экспоненциально убывают. Пусть $\Phi_1(\tau)$ фундаментальная матрица линейной части системы (51). Тогда на основании (47), (48) и (50) получим

$$||\Phi_1(\tau)|| \leqslant Ke^{-\beta\tau}, \quad ||\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)|| \leqslant K_1 e^{-\beta(\tau-t)\tau} e^{(n-1)\alpha t}, \tag{52}$$

$$\beta = \lambda - 3n\alpha.$$

Выберем α так, чтобы было выполнено

$$\beta > 0. \tag{53}$$

Решение системы (51) с начальными данными (24), (50) можно представить в виде

$$\begin{aligned} z(\tau) = {} & \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)+ \\ & + \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{3n\alpha t}[R_1(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t)+ \\ & + R_2(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t)+ \\ & + R_3(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t)+ \\ & + R_4(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t)]dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty). \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} z(\tau) = {} & \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)+ \\ & + \int\limits_{0}^{\tau_1} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{3n\alpha t}[R_1(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t)+ \\ & + R_2(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t) \\ & + R_3(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t)+ \\ & + R_4(e^{-3n\alpha t}z, M(t)e^{-3n\alpha t}z, \mu, t)]dt, \quad \tau \in [0, \tau_1]. \end{aligned} \tag{55}$$

В свою очередь из (54), (54) с учетом (26), (27), (28) и (52) в области (6), (14) имеем оценки

$$\begin{aligned} & ||z(\tau)|| \leqslant Ke^{-\beta\tau}||\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)||+ \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}K_1\left(\bar{L}e^{-\alpha t}||z(t)|| + L_4(\mu)e^{-n\alpha t}\right)dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} & ||z(\tau)|| \leqslant Ke^{-\beta\tau}||c^{(4n-1)}(0)||+ \\ & + \int_{0}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}K_1\left(\bar{L}e^{-\alpha t}||z(t)|| + L_4(\mu)e^{-n\alpha t}\right)dt, \quad \tau \in [0, \tau_1], \end{aligned} \tag{57}$$

константа $\bar{L} > 0$ зависит от области (6), (14). Применяя к неравенствам (55), (57) известный результат [1] получим

$$\begin{aligned}
&||z(\tau)|| \leqslant Ke^{-\gamma\tau}||\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1)||+\\
&+\int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-t)}K_1L_4(\mu)e^{-n\alpha t}dt, \quad \tau\in[\tau_1,\infty), \quad \gamma=\beta-K_1\bar{L}e^{-\alpha\tau},\\
&||z(\tau)|| \leqslant Ke^{-\gamma_1\tau}||c^{(4n-1)}(0)||+\\
&+\int_{0}^{\tau} e^{-\gamma_1(\tau-t)}K_1L_4(\mu)e^{-n\alpha t}dt, \quad \tau\in[0,\tau_1], \quad \gamma_1=\beta-K_1\bar{L}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Используя (53), зафиксируем $\tau_1 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство $\gamma > 0$. Далее ограничем выбор $\alpha > 0$ условием $\alpha < \gamma$. Тогда после интегрирования вторых слагаемых правых частей оценок (58)имеем неравенства

$$\begin{aligned}
&||z(\tau)|| < Ke^{-\gamma\tau}\|\Phi_1^{-1}(\tau_1)\|\|z(\tau_1)\| + K_2e^{-n\alpha\tau}L_4(\mu), \quad \tau\in[\tau_1,\infty),\\
&||z(\tau)|| \leqslant K_3||c^{(4n-1)}(0)|| + K_4L_4(\mu)\big), \quad \tau\in[0,\tau_1],\\
&K_i>0, \quad i=1,2,3,4.
\end{aligned} \tag{59}$$

Из (59), (28) и (24) следует, что можно выбрать $\varepsilon_1\colon 0<\varepsilon_1<\varepsilon$ и $\mu_3\colon 0<\mu_3<\mu_2$ такими, что для всех $x_0\colon \|x_0\|<\varepsilon_1$ and $\mu\colon |\mu|<\mu_3$ функция $z(\tau)$ экспоненциально убывает и принадлежит области (14).

Кроме того, условия (24), (50) и (59) гарантируют существование $\varepsilon_2\colon 0<\varepsilon<\varepsilon_1$ и $\mu_4\colon 0<\mu_4<\mu_3$ таких, что для всех $x_0\colon$ $\|x_0\|<\varepsilon_2$ и $\mu\colon |\mu|<\mu_4$ управление $d(\tau)$ не покинет области (6). В результате, используя решение системы (51) с начальными данными (24), формулы (50), (30), (21), (18), (15), (12), (9) и переходы к пределу, получим пару функций $x(t)$, $u(t)$, являющихся решением исходной задачи (1), (7). Положим величину $\bar{\varepsilon}>0$, которая фигурирует в формулировке теоремы, равной $\varepsilon_2>0$, и величину μ_0 равной $\mu_4>0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Нетрудно заметить, что выполнение условия (5) будет гарантировано, если выполнено условие

$$\dim\tilde{L}=n, \tau\in[0,\infty),$$

где пространство $\tilde{L}(\tau)$ образовано линейными комбинациями столбцов матриц $\tilde{L_1}(\tau), \tilde{L_2}(\tau), \ldots, \tilde{L_n}(\tau)$, где

$$\tilde{L_1}(\tau) = \tilde{B}(\tau), \tilde{L_i}(\tau) = \tilde{A}(\tau)\tilde{L}_{i-1}(\tau) - \frac{d\tilde{L}_{i-1}}{d\tau}, i = 2, \ldots, n.$$

$$\tilde{A} = e^{-\tau}A_0 + e^{-2\tau}A_1 + \cdots + e^{-n\tau}A_{n-1},$$
$$\tilde{B} = e^{-\tau}B_0 + e^{-2\tau}B_1 + \cdots + e^{-2n\tau}B_{2n-1}.$$

Замечание 3. Если вернуться к первоначальной независимой переменной в условии (5), оно примет вид

$$\dim \bar{L}(t) = n,\ t \in [0, 1), \tag{60}$$

где пространство $\bar{L}(t) = \bar{B}(t),\ \bar{L}_i(t) = \bar{A}(t)\bar{L}_{i-1}(t) - (1-t)\frac{d\bar{L}_{i-1}}{dt}$, $i = 2, \ldots n$.

$$\bar{A} = (1-t)A_0 + (1-t)^2A_1 + \cdots + (1-t)^nA_{n-1},$$
$$\bar{B} = (1-t)B_0 + (1-t)^2B_1 + \cdots + (1-t)^{2n}B_{2n-1}.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F(t), \tag{61}$$

$$\begin{aligned} &x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad x \in R^n, \\ &u = (u_1, \ldots, u_r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \tag{62}$$

$$A(t) = \{a_{ij}(t)\}, a_{ij}(t) \in C^n([0, 1]; R^1), i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n,$$

$$B(t) = \{b_{ij}(t)\}, b_{ij}(t) \in C^{2n}([0, 1]; R^1), i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, r,$$

$$F = (F_1, \ldots, F_n)^T, \quad F \in C^{2n}([0, 1]; R^n),$$

$$A_0 = A(1), B_0 = B(1), S = \{B_0, A_0B_0, \ldots, A_0^{n-1}B_0\},$$

$$\operatorname{rank} S = n. \tag{63}$$

Введем матрицы

$$A_i = \frac{(-1)^i}{i!}\frac{d^iA}{dt^i}(1), i = 1, \ldots, n-2,$$

$$B_i = \frac{(-1)^i}{i!}\frac{d^iB}{dt^i}(1), i = 1, \dots, 2n-1,$$

$$\bar{A} = \alpha e^{-\alpha\tau}A_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau}A_1 + \dots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau}A_{n-2},$$

$$\bar{B} = \alpha e^{-\alpha\tau}B_0 + \alpha e^{-2\alpha\tau}B_1 + \dots + \alpha e^{-(2n-1)\alpha\tau}B_{2n-2}, \tau \in [0, \infty),$$

где $\alpha > 0$ — произвольное число.

Рассмотрим пространство $\tilde{\tilde{L}}(\tau)$, образованное векторами $\tilde{\tilde{L}}_1(\tau), \tilde{\tilde{L}}_2(\tau), \dots, \tilde{\tilde{L}}_n(\tau)$

$$\tilde{\tilde{L}}_1(\tau) = \bar{B}(\tau), \tilde{\tilde{L}}_i(\tau) = \bar{A}(\tau)\tilde{\tilde{L}}_{i-1}(\tau) - \frac{\tilde{\tilde{L}}_{i-1}}{d\tau}, i = 2, \dots, n.$$

Предположим, что

$$\dim \tilde{\tilde{L}}(\tau) = n, \tau \in [0, \infty). \tag{64}$$

Задача 2. Найти пару функций $x(t) \in [0,1], u(t) \in [0,1]$, удовлетворяющих системе (61) и условиям

$$x(0) = \bar{x}, \quad x(1) = 0, \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T. \tag{65}$$

Эту пару $x(t), u(t)$ назовем решением задачи (61), (65).
Следствие 1. *Предположим, что для правой части системы (61) выполнены условия (62)–(64), тогда $\forall \bar{x} \in R^n$ существует решение задачи (61), (65). Это решение может быть получено после решения задачи стабилизации для линейной нестационарной системы с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Дадим краткое доказательство Следствия 1. Система, аналогичная (13), имеет вид

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(1)c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} b_{ij}(1)d_j -$$
$$- \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{da_{ij}}{dt}(1)e^{-\alpha\tau}c_j - \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{db_{ij}}{dt}(1)e^{-\alpha\tau}d_j + \dots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{d^n a_{ij}}{dt^n}(\tilde{t}(\tau))(-1)^n e^{-n\alpha\tau}c_j + \dots +$$
$$+ \frac{1}{2n!}\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{d^{2n} b_{ij}}{dt^{2n}}(\tilde{t}(\tau))e^{-2n\alpha\tau}d_j + \qquad (66)$$
$$+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{k!}\frac{d^k F_i}{dt^k}(1)(-1)^k e^{-k\alpha\tau} -$$
$$- \alpha e^{-2n\alpha\tau} \frac{1}{(2n-1)!}\frac{d^{2n-1}F_i}{dt^{2n-1}}(\tilde{t}(\tau)), I = 1, \dots, n,$$
$$\tilde{t}(\tau) = 1 - \theta_i e^{-\alpha\tau}, \theta_i \in [0,1], i = 1, \dots, n.$$

Применяя $2n-2$ раз преобразования (21) в (66) (с $\mu = 1$), получим аналогичную систему (22)

$$\frac{dc^{(2n-2)}}{dt} = \bar{A}c^{(2n-2)} + \bar{B}d + R_1(c^{(2n-2)}, \tau) + R_2(d, \tau) + R_3(\tau), \quad (67)$$

$$R_1 = (R_1^1, \dots, R_1^n)^T, \quad R_2 = (R_2^1, \dots, R_2^n)^T, \quad R_3 = (R_3^1, \dots, R_3^n)^T,$$

где оценки (26) и (28) имеют вид

$$\begin{aligned} &\|R_1(c^{(2n-2)}, \tau)\| \leqslant e^{-4n\alpha\tau}L_1\|c^{(2n-2)}\|, \quad \forall c^{(2n-2)} \in R^n, \\ &\|R_2(d, \tau)\| \leqslant e^{-2n\alpha\tau}L_2\|d\|, \quad \forall d \in R^r, \quad L_1 > 0, \quad L_2 > 0, \end{aligned} \qquad (68)$$

$$\|R_3(\tau)\| \leqslant e^{-2n\alpha\tau}, \quad L_3 > 0, \quad \forall \tau \in [0, \infty). \qquad (69)$$

Используя выше алгоритм, получим управление в виде

$$d(\tau) = M(\tau)c^{(2n-2)}, \qquad (70)$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы

$$\frac{dc^{(2n-2)}}{d\tau} = \bar{\bar{A}} c^{(2n-2)}, \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A} + \bar{B} M(\tau). \tag{71}$$

Подставляя стабилизирующее управление (70) в систему (67), получим

$$\frac{dc^{(2n-2)}}{d\tau} = \bar{\bar{A}} c^{(2n-2)} + R_1(c^{2n-2)}, \tau) + R_2(M(\tau)c^{(2n-2)}, \tau) + R_3(\tau). \tag{72}$$

Решение системы (72) с начальными данными

$$c^{(2n-2)}(0) = \bar{x} + F(1) - \varphi^{(2)}\left(F(1), \frac{dF}{dt}(1)\right) - \dots - \\ - \varphi^{(2n-2)}\left(F(1), \frac{dF}{dt}(1), \dots, \frac{d^{2n-2}F}{dt^{2n-2}}(1)\right),$$

где $\varphi^{(i)} = (\varphi_1^{(i)}, \dots, \varphi_n^{(i)})^T$ имеет вид

$$\begin{aligned} c^{(2n-2)}(\tau) = &\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau_1)c(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)(R_1(c^{(2n-2)}, t) + \\ &R_2(M(t)c^{(2n-2)}, t) + R_3(t))dt, \tau \in [\tau_1, \infty), \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} c^{(2n-2)}(\tau) = &\Phi(\tau)c^{(2n-2)}(0) + \int_{0}^{\tau} \Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)(R_1(c^{(2n-2)}, t) + \\ &R_2(M(t)c^{(2n-2)}, t) + R_3(t))dt, \tau \in [0, \tau_1). \end{aligned} \tag{74}$$

В (73), (74) $\Phi(\tau)$ — фундаментальная матрица системы (71), удовлетворяющая оценкам (47), (48). Используя (47), (48), (68), (69), (73), (74) получим

$$\begin{aligned} &\|c^{(2n-2)}(\tau)\| \leqslant Ke^{\lambda\tau}\|\Phi^{-1}(\tau_1)\| + \\ &+ \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\lambda(\tau-t)}K_1(L_1 + L_2)e^{-\alpha t}\|c^{(2n-2)}\| + L_3 e^{-n\alpha t})dt, \\ &\tau \in [\tau_1, \infty), \end{aligned} \tag{75}$$

$$
\begin{aligned}
&\|c^{(2n-2)}(\tau)\| \leqslant Ke^{\lambda\tau}\|c^{(2n-2)}(0)\|+ \\
&+\int_0^\tau e^{-\lambda(\tau-t)}K_1(L_1+L_2)e^{-\alpha t}\|c^{(2n-2)}\|+L_3e^{-n\alpha t})dt, \qquad (76)\\
&\tau\in[0,\tau_1], \lambda>0.
\end{aligned}
$$

Применяя хорошо известный результат (см. [1]) к (75), (76), получим оценки

$$
\begin{aligned}
\|c^{(2n-2)}(\tau)\| \leqslant Ke^{-\gamma_1\tau}&\|\Phi^{-1}(\tau_1)c^{(2n-2)}(\tau_1)\|+ \\
&+K_1\int_{\tau_1}^\tau e^{-\gamma_1(\tau-t)}L_3e^{-n\alpha t}dt, \\
&\tau\in[\tau_1,\infty), \quad \gamma_1=\lambda-K_1(L_1+L_2)e^{-\alpha\tau_1}, \\
\|c^{(2n-2)}(\tau)\| \leqslant Ke^{-\gamma_1\tau}&\|c^{(2n-2)}(0)\|+ \\
&+K_1\int_0^\tau e^{-\gamma_2(\tau-t)}L_3e^{-n\alpha t}dt, \\
&\tau\in[0,\tau_1], \quad \gamma_2=\lambda-K_1(L_1+l_2).
\end{aligned}
\qquad (77)
$$

Используя условие $\lambda > 0$, выберем $\tau_1 > 0$, удовлетворяющее неравенству $\gamma_1 > 0$. Тогда согласно выбору τ_1 из (77) следует, что решение системы (72) начинает $\tau_1 > 0$ экспоненциально убывать независимо от выбора начальных условий. В этом случае $\|c^{(2n-2)}(\tau)\| = O(e^{-n\alpha\tau}), \tau \longrightarrow \infty$.

Подстановка этого решения в формулы (70), (21), (12), (9) и переход к пределу дадут решение исходной задачи (61), (65), что доказывает следствие.

2.5 Решение задачи управления однозвенным роботом–манипулятором

Согласно [9], система уравнений, описывающая движение манипулятора при перемещении груза переменной массы имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{x_1} = x_2 \\
&\dot{x_2} = -a_2(t)\sin x_1 - a_1(t)x_2 + u + \mu F t,
\end{aligned}
\qquad (78)
$$

где x_1 — угол отклонения манипулятора в вертикальной оси, x_2 — скорость изменения угла отклонения, $a_1(t) = \bar{\alpha}L^{-2}m_1^{-1}(t)$,

$m_1(t) = m(t) + \frac{M}{3}$, $a_2(t) = gL^{-1}\left(m(t) + \frac{M}{2}\right) m_1^{-1}(t)$, g — ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ — коэффициент вязкого трения, $m(t) = m_0 - qt$, $q > 0$ скорость изменения массы, m_0 — начальная масса груза, $\mu t F$ — возмущение, $x = (x_1, x_2)^T$, управление u скалярно. Рассмотрим краевые условия

$$x(0) = x_0 = (x_0^1, 0)^T, \quad x(1) = 0. \tag{79}$$

После замены (9) и (12) в системе (78) и условиях (79) получим

$$\begin{aligned} &\frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \\ &\frac{dc_2}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2(1 - e^{-\alpha\tau}) \sin c_1 - a_1(1 - e^{-\alpha\tau}) c_2 + \\ &\qquad + \alpha e^{-\alpha\tau} d + \alpha\mu e^{-\alpha\tau} F - \alpha\mu e^{2\alpha\tau} F, \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} &c_1(0) = x_0^1, \quad c_2(0) = 0, \quad c(\tau) \longrightarrow 0 \text{ при } \tau \longrightarrow \infty, \\ &c(\tau) = (c_1(\tau), c_2(\tau))^T. \end{aligned} \tag{81}$$

Для решения задачи (80), (81) достаточно выполнить одно преобразование сдвига

$$c_2(\tau) = c_2^1(\tau) - \mu e^{-\alpha\tau} F. \tag{82}$$

Матрицы P и Q соответствующие линейной части системы (22) запишутся так

$$P = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -a_2(1), & -a_1(1) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После решения задачи стабилизации системы

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} P\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} Q d, \tag{83}$$

находим закон управления вида

$$\begin{aligned} &d(\tau) = M(\tau)\bar{c}, \quad \bar{c} = (c_1, c_2^{(1)})^T, \ M(\tau) = \\ &= \frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha^2} \left(e^{\alpha\tau} \left(-2 + \alpha^2 e^{-2\alpha\tau} a_2(1) \cos \bar{x}_1 \right), \alpha \left(-3 + \alpha \left(1 + e^{-\alpha\tau} a_1(1) \right) \right) \right), \end{aligned} \tag{84}$$

гарантирующий экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (83). Далее решаем задачу Коши для системы

$$
\begin{aligned}
&\frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2^{(1)} - \mu\alpha e^{-2\alpha\tau} F,\\
&\frac{dc_2^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 (1 - e^{-\alpha\tau}) \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 (1 - e^{-\alpha\tau}) -\\
&- \alpha\mu e^{-2\alpha\tau} F + \alpha e^{-\alpha\tau} d,
\end{aligned}
\tag{85}
$$

замкнутой управлением (84) с начальными условиями

$$
c_1(0) = x_0^1, \quad c_2^{(1)}(0) = \mu F. \tag{86}
$$

На заключительном этапе переходим к исходным зависимым и переменным x и t по формулам (82), (12), (9).

§3. Решение задачи стабилизации для нелинейных стационарных систем с учетом запаздывания управляющего сигнала

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t-h)) + F, \tag{1}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u_1, \ldots, u_r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0,1],$$

$$f \in C^{4n}(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n)^T, \tag{2}$$

$$F \in R^n, \quad F = (F_1, \ldots, F_n)^T,$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

Пусть

$$A = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right\}, B = \left\{\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)\right\},$$

$$S = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B), \quad \mathrm{rank} S = n, \tag{4}$$

$$\|u\| < N, \quad N > 0, \quad N = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Здесь F — постоянно действующее возмущение.
Задача 1. Найти управление $u(t) \in C^1([0,1]), h > 0$ и функцию $x(t) \in C^1([0,1])$, удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$\begin{aligned} &x(0) = \bar{x}, \quad u(t) \equiv 0, t \in [-h, 0], \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T, \\ &\|x(\bar{t})\| \leqslant \varepsilon, \ 1 - \bar{t} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

В (6) $\bar{t}$ — заранее неизвестный момент времени, $\varepsilon > 0$ — заданное число. Пару функций $x(t), u(t)$ будем называть соответственно решением задачи 1.
Теорема. *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2)–(4). Тогда для* $\forall \varepsilon > 0$ *существует* $\varepsilon_0^1 > 0, \varepsilon_0^2 > 0, \varepsilon_0^3 > 0$ *такое что* $\forall \bar{x} \in R^n$, $\forall F \in R^n$, $\forall h$, *удовлетворяющим неравенствам* $\|\bar{x}\| < \varepsilon_0^1$, $\|F\| < \varepsilon_0^2$, $0 < h < \varepsilon_0^3$, *существует решение Задачи 1, которое может быть получено после решения задачи*

стабилизации линейной нестационарной системы с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Главная идея доказательства теоремы состоит в том, что посредством преобразований зависимых и независимых переменных, решение исходной задачи сводится к нахождению вспомогательного управления, гарантирующего экспоненциальное убывание решения вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида на конечном промежутке времени. Для ее решения находится синтезирующее вспомогательное управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части вспомогательной системы. На заключительном этапе осуществляется переход к исходным переменным и решается задача Коши для соответствующей вспомогательной системы.

3.1 Построение вспомогательной системы

Сделаем преобразование независимой переменной t к τ по формуле

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{7}$$

где $\alpha > 0$ некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной система (1) примет вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} f(c, d) + \alpha e^{-\alpha\tau} F, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &c(\tau) = x(t(\tau)), \quad d(\tau) = u(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty), \\ &c = (c_1, \ldots, c_n)^T, \quad d = (d_1, \ldots, d_r)^T. \end{aligned} \tag{9}$$

Введем в рассмотрение управление $\bar{d}(\tau) = u(t(\tau) - h), \tau \in [0, +\infty)$. Очевидно, $\bar{d}(\tau) \in C^1([0, +\infty))$.

Задача 2. Найти управление $\bar{d}(\tau) \in C^1([0, +\infty))$ и функцию $c(\tau) \in C^1([0, +\infty))$, удовлетворяющие системе(8) и условиям

$$\begin{gathered} c(0) = \bar{x}, \quad \bar{d}(\tau) \equiv 0, \tau \in \left[-\tfrac{1}{\alpha}\ln(1+h), 0\right], \\ \|c(\bar{\tau})\| \leqslant \varepsilon, e^{-\alpha\bar{\tau}} \leqslant \varepsilon, \quad \bar{\tau} > 0. \end{gathered} \tag{10}$$

В (10) величина $\bar{\tau} > 0$ подлежит определению.
Замечание 1. Нетрудно видеть, что имея решение Задачи 2, с помощью формул (7) и (9) легко получить решение Задачи 1.

Введем обозначения

$$\tilde{c} = \theta_i c, \quad \tilde{d} = \theta_i d, \quad \theta_i \in [0,1], \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{r} m_i,$$

$$k! = k_1! \ldots k_n!, \quad m! = m_1! \ldots m_r!$$

Используя свойства (2), (3) и разложение правой части системы (1) в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0)$, систему (8) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} F_i + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) c_j + \\ + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0,0) d_j + \\ + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0) c_j c_k + \right. \\ + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(0,0) c_j d_k + \\ \left. + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0) d_j d_k \right) + \cdots + \alpha e^{-\alpha\tau} \times \\ \sum_{|k|+|m|=4n-1} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_r^{m_r}}(0,0) \\ \times \frac{1}{k!m!} c_1^{k_1} \ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \ldots d_r^{m_r} + \alpha e^{-\alpha\tau} \times \\ \sum_{|k|+|m|=4n} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_r^{m_r}}(\tilde{c}, \tilde{d}) \\ \times c_1^{k_1} \ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \ldots d_r^{m_r}, \\ i = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{11}$$

Ограничим область изменения $c(\tau)$ неравенством

$$\|c(\tau)\| < C_1, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{12}$$

$$\tilde{c} = \theta_i c, \quad \tilde{d} = \theta_i d, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций $c_i(\tau) : c_i$ к $c_i^{(4n)}$, $i = 1, \ldots, n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований нормы слагаемых, не содержащих в явном виде степеней компонент $c^{(4n)}$ и d, чтобы удовлетворяли оценке $O(e^{-4n\alpha\tau}\|F\|)$ при $\tau \to \infty$, $\|F\| \to 0$. На первом этапе выполним замену $c_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ на $c_i^{(1)}(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|} f_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r}},$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

После подстановки (13) в левую и правую части системы (11) с учетом введенного обозначения получим систему

$$
\begin{aligned}
\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} &= -\alpha e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)F_j+\\
&+\frac{1}{2}\alpha e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0)F_jF_k+\\
&+\alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)c_j^{(1)}-\\
&-e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0)F_kc_j^{(1)})+\\
&+\alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(0,0)d_k-\\
&-e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k\partial x_j}(0,0)F_jd_k)+\\
&+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(0,0)c_j^{(1)}c_k^{(1)}+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(0,0)d_kc_j^{(1)}+\\
&+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(0,0)d_jd_k+\cdots+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n-1}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(0,0)\times\\
&(c_1^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times\cdots\times(c_n^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}\times\\
&d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r}+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(\tilde{c},\tilde{d})\times\\
&(c_1^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times\cdots\times(c_n^{(1)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r},\\
&i=1,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Из (10), (13) следует

$$c_i^{(1)}(0) = \bar{x}_i + F_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (14) нормы слагаемых, не содержащих в явном виде степеней компонент векторов $c^{(1)}$ и d, в области (5), (12) удовлетворяют условию $O(e^{-2\alpha\tau}\|F\|)$ при $\tau \to \infty$, $\|F\| \to 0$. На втором этапе сделаем замену

$$\begin{aligned} c_i^{(1)}(\tau) = c_i^{(2)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)F_j = \\ = c_i^{(2)} + e^{-2\alpha\tau}\varphi_i^{(2)}(F), \\ \varphi_i^{(2)}(F) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)F_j, \varphi_i^{(2)}(0) = 0, \\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{16}$$

В результате в новых переменных система (14) и начальные условия (15) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_i^{(2)}}{d\tau} = \alpha(\frac{1}{2}e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)F_jF_k + \\ + \alpha e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\varphi_j^{(2)} - \\ - e^{-4\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)F_k\varphi_j^{(2)} + \\ + \frac{1}{2}e^{-5\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)\varphi_j^{(2)}\varphi_k^{(2)}) + \\ + \alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)c_j^{(2)} - \\ - e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0)F_kc_j^{(2)} + \end{aligned} \tag{17}$$

$$+ e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0) \varphi_k^{(2)} c_j^{(2)}) +$$

$$+ \alpha(e^{-\alpha\tau} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_k}(0,0) d_k +$$

$$+ e^{-2\alpha\tau} \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(0,0) F_k d_k +$$

$$+ e^{-3\alpha\tau} \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(0,0) \varphi_j^{(2)} d_k) +$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(0,0) c_k^{(2)} c_j^{(2)} +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(0,0) d_k c_j^{(2)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(0,0) d_j d_k +$$

$$+ \cdots +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n-1} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(0,0) \times$$

$$\times (c_1^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \varphi_1^{(2)} - e^{-\alpha\tau} F_1)^{k_1} (c_2^{(2)} +$$

$$+ e^{-2\alpha\tau} \varphi_2^{(2)} - e^{-\alpha\tau} F_2)^{k_2} \times \cdots \times$$

$$\times (c_n^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \varphi_n^{(2)} - e^{-\alpha\tau} F_n)^{k_n} \times$$

$$\times d_1^{m_1} d_2^{m_2} \ldots d_r^{m_r} +$$

$$+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=4n} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\tilde{c}, \tilde{d}) \times$$

$$\times (c_1^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \varphi_1^{(2)} - e^{-\alpha\tau} F_1)^{k_1} (c_2^{(2)} +$$

$$+ e^{-2\alpha\tau} \varphi_2^{(2)} - e^{-\alpha\tau} F_2)^{k_2} \times \cdots \times$$

$$\times (c_n^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \varphi_n^{(2)} - e^{-\alpha\tau} F_n)^{k_n} d_1^{m_1} d_2^{m_2} \ldots d_r^{m_r},$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

$$c_i^{(2)}(0) = \bar{x}_i + F_i - \varphi_i^{(2)}(F), \quad \varphi_i^{(2)}(0) = 0, \ i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

В отличии от предыдущей замены в правой части системы (17) нормы слагаемых, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $c^{(2)}$ и d удовлетворяют условию $O(e^{-3\alpha\tau}\|F\|)$ при $\tau \to \infty$, $\|F\| \to 0$ в области (5), (12). Используя (13)–(18) и индуктивный переход на k-ом шаге получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)}(\tau) = c_i^{(k)}(\tau) + e^{-k\alpha\tau}\varphi_i^{(k)}(F), \quad \varphi_i^{(k)}(0) = 0, \tag{19}$$

$$i = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, \ c_i^{(0)} = c_i.$$

Если применить преобразования (19) $4n$ раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора $c^{(4n)}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, n$ а также слагаемые линейные по компонентам вектора d и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i = 1, \ldots, n$, то согласно (14)–(19) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} &\frac{dc^{(4n)}}{d\tau} = Pc^{(4n)} + Qd + R_1(c^{(4n)}, d, \tau) + \\ &+ R_2(c^{(4n)}, d, \tau) + R_3(c^{(4n)}, d, \tau) + R_4(c^{(4n)}, d, \tau), \\ &R_1 = (R_1^1, \ldots, R_1^n)^T, \ R_2 = (R_2^1, \ldots, R_2^n)^T, \\ &R_3 = (R_3^1, \ldots, R_3^n)^T, R_4 = (R_4^1, \ldots, R_4^n)^T, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} P &= \alpha e^{-\alpha\tau}(A + e^{-\alpha\tau}P_2(F) + \cdots + \\ &\quad + e^{-(n-1)\alpha\tau}P_{n-1}(F)), \\ Q &= \alpha e^{-\alpha\tau}(B + e^{-\alpha\tau}Q_2(F) + \cdots + \\ &\quad + e^{-(n-1)\alpha\tau}Q_{n-1}(F)), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} c^{(4n)}(0) = \bar{x} + F - \varphi^{(2)}(F) - \varphi^{(3)}(F) - \\ - \cdots - \varphi^{(4n)}(F), \\ \varphi^{(i)} = (\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})^T, \\ i = 1, \ldots, 4n, \quad \varphi^{(i)}(0) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Функции R_1^i содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $c^{(4n)}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant n+1$. Функции R_2^i содержат все слагаемые линейно зависящие от компонент вектора d с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant n+1$. В R_3^i содержатся все слагаемые нелинейные по компонентам векторов $c^{(4n)}$ от d. Функции R_4^i состоят из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $c^{(4n)}$ и d.

Введём вспомогательную управляющую функцию $\upsilon(\tau)$, связанную с $d(\tau)$ уравнением

$$\frac{d}{d\tau}d(\tau) = \upsilon, \upsilon = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_r)^T. \tag{23}$$

Положим

$$d(0) = 0. \tag{24}$$

Тогда систему (20), (23) и начальные данные (22), (24) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c}^{(4n)} + \bar{Q}\upsilon + \bar{R}_1(c^{(4n)}, d, \tau) + \\ + \bar{R}_2(c^{(4n)}, d, \tau) + \bar{R}_3(c^{(4n)}, d, \tau) + \bar{R}_4(c^{(4n)}, d, \tau),\end{gathered} \tag{25}$$

$$\bar{c}^{(4n)} = (c^{(4n)}, d)^T_{n+r\times 1},$$

$$\bar{R}_1 = (R_1^1, \ldots, R_1^n, 0, \ldots 0)^T_{n+r\times 1},$$

$$\bar{R}_2 = (R_2^1, \ldots, R_2^n, 0, \ldots 0)^T_{n+r\times 1},$$

$$\bar{R}_3 = (R_3^1, \ldots, R_3^n, 0, \ldots 0)^T_{n+r\times 1},$$

$$\bar{R}_4 = (R_4^1, \ldots, R_4^n, 0, \ldots 0)^T_{n+r\times 1},$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r\times n+r}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r\times r},$$

$$\bar{c}^{(4n)}(0) = \bar{c}_0^{(4n)}, \quad \bar{c}_0^{(4n)} = (c^{(4n)}(0), 0, \ldots, 0)^T, \tag{26}$$

где $O_i, i = 1, 2, 3$ — матрицы с нулевыми элементами соответствующих размерностей. E — единичная матрица.

Замечание 2. Пусть $\tilde{S} = \{\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_{n+1}\}$,

$$\tilde{L}_1 = \bar{Q}, \tilde{L}_i = \bar{P}\tilde{L}_{i-1} - \frac{d\tilde{L}_{i-1}}{d\tau}, i = 2, \ldots, n+1,$$

$$\tilde{\tilde{L}}_1 = Q, \tilde{\tilde{L}}_i = P\tilde{\tilde{L}}_{i-1} - \frac{d\tilde{\tilde{L}}_{i-1}}{d\tau}, i = 2, \ldots, n.$$

Очевидно

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} O_{n\times r} & \tilde{\tilde{L}}_1 & \ldots & \tilde{\tilde{L}}_n \\ E_{r\times r} & O_{r\times r} & \ldots & O_{r\times r} \end{pmatrix},$$

где $O_{n\times r}, O_{r\times r}$ матрицы с нулевыми элементами.

Из (19), (16), (13), (10) следует, что мы можем ограничить область изменения $\|c^{(4n)}\|$ и $\|F\|$ неравенствами

$$\|c^{(4n)}\| < C_2, \|F\| < C_3, C_2 > 0, C_3 > 0, \tag{27}$$

$$\tau \in [0, +\infty).$$

так, чтобы соответствующая функция $c(\tau)$ принадлежала области (12).

3.2 Оценка слагаемых правой части вспомогательной системы и описание метода решения задачи

Из построения системы (20) и определения функций R_1^i, R_2^i, R_3^i, R_4^i, принадлежащих области (5), (27), имеют место оценки

$$\|P_i(F)\| \to 0, \quad \|Q_j(F)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|F\| \to 0, \tag{28}$$

$$i = 2, \ldots, n-1, \quad j = 2, \ldots, n-1,$$

$$\begin{aligned} &\|R_1(c^{(4n)}, d, \tau)\| \leqslant e^{-(n+1)\alpha\tau} L_1 \|c^{(4n)}\|, \\ &\|R_2(c^{(4n)}, d, \tau)\| \leqslant e^{-(n+1)\alpha\tau} L_2 \|d\|, \\ &\|R_3(c^{(4n)}, d, \tau)\| \leqslant e^{-\alpha\tau} L_3 (\|c^{(4n)}\|^2 + \|d\|^2), \\ &\|R_4(c^{(4n)}, d, F, \tau)\| \leqslant e^{-(4n+1)\alpha\tau} L_4(F). \end{aligned} \tag{29}$$

$$L_i > 0, i = 1, 2, 3, \quad L_4(F) > 0.$$

Кроме того из построения R_4 следует $L_4(F) \to 0$ при $\|F\| \to 0$. Рассмотрим линейную часть системы (25)

$$\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c}^{(4n)} + \bar{Q}\upsilon. \tag{30}$$

Лемма. *Пусть для системы (1) выполнены условия (4). Тогда существует $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < C_3$ такое что для всех $F \in R^n$: $\|F\| < \varepsilon_2$ существует управление $\upsilon(\tau)$ вида:*

$$\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{c}^{(4n)}, \quad \|M(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \to \infty, \tag{31}$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (30), замкнутой управлением (31).

На следующем этапе находим решение задачи Коши для системы (25) с начальными данными (26), (22) на промежутке $[0, \bar{\tau}]$ после подстановки в ее правую часть управления (31). Величина $\bar{\tau}$, которая зависит от $\varepsilon > 0$, будет определена в процессе доказательства теоремы. В результате получим известную функцию $\upsilon(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty)$. Далее используя формулу (7) строим функцию

$$\bar{\upsilon}(t) = \upsilon(\tau(t)), \quad \tau = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-t), \tag{32}$$

и решаем задачу Коши для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t-h)) + F, \\ \dot{u} &= \frac{1}{\alpha}(1-t)^{-1}\bar{\upsilon}(t) \end{aligned} \tag{33}$$

с начальными данными (6) на промежутке $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} = 1 - e^{-\alpha\bar{\tau}}$. В результате получим известные функции $x(t)$, $u(t)$, которые являются решением Задачи 1.

3.3 Доказательство леммы и теоремы

Пусть L_1^j, $j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы $\bar{Q}$. Построим матрицу

$$
\begin{aligned}
&S_1 = \{L_1^1, \ldots, L_{k_1}^1, L_1^2, \ldots, L_{k_2}^2, \ldots, L_1^r, \ldots, L_{k_r}^r\},\\
&L_i^j = \bar{P} L_{i-1}^j - \frac{dL_{i-1}^j}{d\tau},\\
&j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Здесь k_j, $j = 1, \ldots, r$ — максимальное количество столбцов вида $L_1^j, \ldots, L_{k_j}^j$, $j = 1, \ldots, r$ таких, что векторы $L_1^1, L_2^1, \ldots, L_{k_1}^1, L_1^2, \ldots, L_{k_2}^2, \ldots, L_1^r, \ldots, L_{k_r}^r$ линейно независимы $\forall \tau \in [0, +\infty)$. $\bar{L}_1^j$, $j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы Q. Рассмотрим матрицу

$$
\begin{aligned}
&S_2 = \{\bar{L}_1^1, \bar{L}_2^1, \ldots, \bar{L}_{k_1}^1, \bar{L}_1^2, \ldots, \bar{L}_{k_2}^2, \ldots, \bar{L}_1^r, \ldots, \bar{L}_{k_r}^r\},\\
&\bar{L}_i^j = P \bar{L}_{i-1}^j - \frac{d\bar{L}_{i-1}^j}{d\tau},\\
&j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j.
\end{aligned}
$$

Покажем, что при достаточно малых $\|F\|$

$$
\operatorname{rank} S_2 = n, \quad \forall \tau \in [0, +\infty). \tag{35}
$$

Пусть $\bar{\bar{L}}_1^j, j = 1, \ldots, r$ — j-ый столбец матрицы $\alpha e^{-\alpha\tau} B$. Построим матрицу

$$
\begin{aligned}
&S_3 = \{\bar{\bar{L}}_1^1, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_1}^1, \bar{\bar{L}}_1^2, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_2}^2, \ldots, \bar{\bar{L}}_1^r, \ldots, \bar{\bar{L}}_{k_r}^r\},\\
&\bar{\bar{L}}_i^j = \alpha e^{-\alpha\tau} A \bar{\bar{L}}_{i-1}^j - \frac{d\bar{\bar{L}}_{i-1}^j}{d\tau},\\
&j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j.
\end{aligned}
$$

Из условий (21), (28) следует существование $\bar{\varepsilon}_1 > 0, \bar{\varepsilon}_1 < C_3$ такого, что для любого F из области: $\|F\| < \bar{\varepsilon}_1$ $\operatorname{rank} S_2 = \operatorname{rank} S_3, \forall \tau \in [0, +\infty)$. Рассуждая методом от противного и используя (4) нетрудно убедиться в справедливости равенства $\operatorname{rank} S_2 = \operatorname{rank} S_3 = n, \forall \tau \in [0, +\infty)$. Кроме того на основании структуры матрицы (34) (см. Замечание 2) и условия (35) следует, что $\operatorname{rank} S_1 = n + r$, $\forall \tau \in [0, +\infty)$, а также

$$
\|S_1^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau}), \tau \to \infty. \tag{36}
$$

Положим $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_1$. Считая, что $\|F\| < \varepsilon_2$ выполним в системе (30) замену переменных

$$\bar{c}^{(4n)} = S_1(\tau)y. \tag{37}$$

В результате получим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = S_1^{-1}\left(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau}\right)y + S_1^{-1}\bar{Q}\upsilon.$$

Согласно (см. [76])

$$S_1^{-1}(\bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau}) = \{\bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{k_1}, \bar{\varphi}_{k_1}(\tau), \dots,$$

$$\bar{e}_{k_1+\dots+k_{r-1}+2}, \bar{\varphi}_{k_r-1}(\tau), \dots, \bar{e}_{k_1+\dots+k_r}, \bar{\varphi}_{k_r}(\tau)\},$$

$\bar{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T_{(n+r)\times 1}$, где 1 стоит на i-ом месте,

$$\bar{\varphi}_{k_j} = (-\varphi^1_{k_1}, \dots, -\varphi^{k_1}_{k_1}, \dots,$$

$$-\varphi^1_{k_j}, \dots, -\varphi^{k_j}_{k_j}, 0, \dots, 0)^T_{n+r\times 1},$$

$-\varphi^i_{k_j}$ являются коэффициентами разложения вектора $L^j_{k_j+1}$ по векторам L^1_i, $i = 1, \dots, k_1$; L^2_i, $i = 1, \dots, k_2$; $\dots$; L^j_i, $i = 1, \dots, k_j$, $j = 1, \dots, r$, $\sum_{j=1}^r k_j = n + r$, то есть

$$L^j_{k_j+1} = -\sum_{i=1}^{k_1} \varphi^i_{k_1}(\tau)L^1_i - \dots - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi^i_{k_j}(\tau)L^j_i, \tag{38}$$

$S_1^{-1}\bar{Q} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{k_j+1}, \dots, \bar{e}_{\gamma+1}\}_{n+r\times r}$, $\gamma = \sum_{i=1}^{r-1} k_i$. Рассмотрим задачу стабилизации системы вида

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_{k_j}}{d\tau} = \{\bar{e}^{k_j}_2, \dots, \bar{e}^{k_j}_{k_j}, \bar{\bar{\varphi}}_{k_j}\}y_{k_j} + \bar{e}^{k_j}_1 \upsilon_j, j = 1, \dots, r,\\
&y_{k_j} = (y^1_{k_j}, \dots, y^{k_j}_{k_j})^T_{k_j\times 1},\\
&\bar{e}^{k_j}_1 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T_{k_j\times 1},
\end{aligned} \tag{39}$$

где 1 стоит на i-ом месте, $\bar{\bar{\varphi}}_{k_j} = (-\varphi^1_{k_j}, \dots, -\varphi^{k_j}_{k_j})^T_{k_j \times 1}$. Пусть $y^{k_j}_{k_j} = \psi$. Фазовые переменные системы (39) связаны с функцией $\psi(\tau)$ и ее производными следующими равенствами

$$
\begin{aligned}
&y^{k_j}_{k_j} = \psi, \quad y^{k_j-1}_{k_j} = \psi^{(1)} + \varphi^{k_j}_{k_j}\psi, \\
&y^{k_j-2}_{k_j} = \psi^{(2)} + \varphi^{k_j}_{k_j}\psi^{(1)} + \left(\frac{d\varphi^{k_j}_{k_j}}{d\tau} + \varphi^{k_j-1}_{k_j}\right)\psi, \dots
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
y^1_{k_j} = \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau)\psi^{(k_j-2)} + \dots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + r_0(\tau)\psi.
$$

Дифференцируя последнее равенство (40) сводим систему (39) к уравнениям

$$
\psi^{(k_j)} + \varepsilon_{k_j-1}(\tau)\psi^{(k_j-1)} + \dots + \varepsilon_0(\tau)\psi = \upsilon_j, \tag{41}
$$

$$
j = 1, \dots, r.
$$

Замечание 3. Из (38), (21) и определения функций $\varphi^i_{k_j}$, где $i = 1, \dots, k_j$ следует, что в (39)–(41) функции $\varphi^{k_j}_{k_j}(\tau), \dots, \varphi^2_{k_j}(\tau)$, $\varphi^1_{k_j}(\tau)$, их производные, а также функции $r_{k_j-2}(\tau), \dots, r_0(\tau)$, $\varepsilon_{k_j-1}(\tau), \dots, \varepsilon_0(\tau)$ ограничены. Пусть

$$
\upsilon_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i})\psi^{(k_j-i)}, \quad j = 1, \dots, r, \tag{42}
$$

где γ_{k_j-i}, $i = 1, \dots, k_j$ выбраны так, чтобы корни $\lambda^1_{k_i}, \dots, \lambda^{k_i}_{k_i}$ характеристических уравнений

$$
\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1} + \dots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \dots, r
$$

удовлетворяли условиям

$$
\lambda^i_{k_i} \neq \lambda^j_{k_i},\ i \neq j,\ \lambda^j_{k_i} < -(2n+1)\alpha - 1,
$$

$$
j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, r.
$$

Возвращаясь в (42) к исходным переменным, получим

$$
\upsilon_j = \delta_{k_j} T^{-1}_{k_j} S^{-1}_{1k_j} \bar{c}^{(4n)},\ j = 1, \dots, r,
$$

$$\delta_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1}, \dots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0),$$

T_{k_j} — матрица равенства (40), то есть

$$y_{k_j} = T_{k_j}\bar{\psi},\ \bar{\psi} = (\psi^{(k_j-1)}, \dots, \psi)^T,$$

$S^{-1}_{1k_j}$ — матрица, состоящая из соответствующих k_j-строк матрицы S^{-1}_1. Найденное управление можно записать в виде (31), где

$$M(\tau) = \delta_k T^{-1}_k S^{-1}_{1k} = (\delta_{k_1} T^{-1}_{k_1} S^{-1}_{1k_1}, \dots, \delta_{k_r} T^{-1}_{k_r} S^{-1}_{1k_r})^T. \tag{43}$$

Из условий (43), (36) и Замечания 3 следует (31). Пусть $\Psi(\tau)$ — фундаментальная матрица системы (41), замкнутая управлением (42). Можно показать, что $\Psi(\tau)$ — фундаментальная матрица экспоненциально устойчивой линейной системы с постоянными коэффициентами и что верна оценка:

$$\begin{gathered} \|\Psi(\tau)\| \leqslant \tilde{K} e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \\ \|\Psi(\tau)\Psi^{-1}(t)\| \leqslant \tilde{K} e^{-\lambda(\tau-t)}, \quad \tilde{K} > 0. \end{gathered} \tag{44}$$

Пусть система (30) замкнута управлением (31), (43)

$$\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} = C(\tau)\bar{c}^{(4n)}, \quad C(\tau) = \bar{P}(\tau) + \bar{Q}(\tau)M(\tau). \tag{45}$$

Пусть $\Phi(\tau)$, $\Phi(0) = E$ (E — единичная матрица) фундаментальная матрица системы. Введем блочно-диагональную матрицу $T(\tau)$ с матрицами T_{k_i}, $i = 1, \dots, r$ на ее диагонали. С учетом (37) и (40) фундаментальная матрица системы (45) $\Phi(\tau)$ имеет вид

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)\Psi^{-1}(0)T^{-1}(0)S^{-1}_1(0). \tag{46}$$

Тогда из (36), (44) и (46), структуры $S_1(\tau)$: $\|S_1(\tau)\| = O(e^{-\alpha\tau})$, $\tau \to \infty$, и Замечания 3 имеем

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\tau)\| \leqslant K e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \\ &\|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| \leqslant K e^{-\lambda(\tau-t)} e^{(n-1)\alpha t}, \quad \tau \geqslant t, \end{aligned} \tag{47}$$

$$K > 0, \quad \tau \in [0, \infty)$$

Лемма доказана. Докажем теорему.

Система (25), замкнутая управлением (31), (43) имеет вид

$$\frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} = C(\tau)\bar{c}^{(4n)} + \bar{R}_1(c^{(4n)}, d, \tau) + \bar{R}_2(c^{(4n)}, d, \tau) + \qquad (48)$$
$$+\bar{R}_3(c^{(4n)}, d, \tau) + \bar{R}_4(c^{(4n)}, d, \tau).$$

Выполним в системе (48) замену переменной $\bar{c}^{(4n)}$ на z по формуле

$$\begin{aligned} &\bar{c}^{(4n)} = ze^{-n\alpha\tau}, \quad \bar{c}^{(4n)}(0) = z(0), z = (z_1, z_2)^T, \\ &c^{(4n)} = z_1 e^{-n\alpha\tau}, \quad d = z_2 e^{-n\alpha\tau}. \end{aligned} \qquad (49)$$

В результате получим систему

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{d\tau} = Dz + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_1(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\ &\quad + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\ &\quad + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\ &\quad + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_4(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau), \\ &D(\tau) = C(\tau) + n\alpha E. \end{aligned} \qquad (50)$$

Пусть $\Phi_1(\tau)$ фундаментальная матрица линейной части системы (50). Тогда из (47), (49) следуют оценки

$$\begin{aligned} &\|\Phi_1(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}, \\ &\|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leqslant Ke^{-\beta(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \\ &\qquad \beta = \lambda - n\alpha, \quad \tau \geqslant t. \end{aligned} \qquad (51)$$

Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы $\beta > 0$. Решение системы (50) с начальными данными (49), (26) и (22) имеет вид

$$\begin{aligned} &z(\tau) = \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1) + \\ &\quad + \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\ &\quad + \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\ &\quad + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\ &\quad + \bar{r}_4(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t)]dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty) \end{aligned} \qquad (52)$$

$$
\begin{aligned}
z(\tau) = {} & \Phi_1(\tau)\bar{c}^{(4n)}(0) + \\
& + \int\limits_0^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + \bar{R}_4(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t)]dt, \quad \tau \in [0, \tau_1].
\end{aligned} \tag{53}
$$

Из (52), (53) и условий (29), (51) в области (5), (27) справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
& \|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\beta(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\| + \\
& + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}K\left(\bar{L}e^{-\alpha t}\|z(t)\| + L_4(F)e^{-2n\alpha t}\right)dt, \\
& \tau \in [\tau_1, \infty),
\end{aligned} \tag{54}
$$

$$
\begin{aligned}
& \|z(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}\|c^{(4n)}(0)\| + \\
& + \int_0^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}K\left(\bar{L}e^{-\alpha t}\|z(t)\| + L_4(F)e^{-2n\alpha t}\right)dt, \\
& \tau \in [0, \tau_1],
\end{aligned} \tag{55}
$$

где $\bar{K} = Ke^{(n-1)\alpha\tau_1}$, $\bar{L} > 0$ — константа, зависящая от области (5), (27). Применяя известный результат (см. [1]) к неравенствам (54), (55) получим

$$
\begin{aligned}
& \|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\| + \\
& + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\mu(\tau-t)}KL_4(F)e^{-2n\alpha t}dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty),
\end{aligned} \tag{56}
$$

$$
\mu = \beta - K\bar{L}e^{-\alpha\tau_1},
$$

$$
\begin{aligned}
& \|z(\tau)\| \leqslant Ke^{\mu_1\tau}\|c^{(4n)}(0)\| + \\
& + \int_0^{\tau} e^{\mu_1(\tau-t)}KL_4(F)e^{-2n\alpha t}dt, \quad \tau \in [0, \tau_1],
\end{aligned} \tag{57}
$$

$$\mu_1 = \beta - K\bar{L}.$$

Зафиксируем $\tau_1 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство $\mu > 0$. Тогда после вычисления интегралов во вторых слагаемых правых частей (56) и (57) получим

$$\begin{aligned} &\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\|+ \\ &+ K_1L_4(F)e^{-2n\alpha\tau}, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} &\|z(\tau)\| \leqslant K\|c^{(4n)}(0)\| + K_2L_4(F), \\ &\tau \in [0, \tau_1], \quad K_i > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{59}$$

В (58), (59) константы $K_i, i = 1, 2$ зависят от области (5), (27). Из (58) и (59), свойства функции $L_4(F)$ ($L_4(F) \to 0$ при $\|F\| \to 0$) и формулы (22), следует, что можно выбрать $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_1 > \bar{\varepsilon}_2 > 0$ так, чтобы для $\forall \bar{x}, F\colon \|\bar{x}\| \leqslant \bar{\varepsilon}_2, \|F\| \leqslant \bar{\varepsilon}_2$ функция $z(\tau)$ будет экспоненциально убывать и принадлежать области (5), (27). Используя формулы (49), (31) получим известные функции $\bar{c}^{(4n)}(\tau)$, $\upsilon(\tau)$. Вторая компонента $\bar{c}^{(4n)}(\tau)$ даст известную функцию $d(\tau)$. При этом согласно (58), (49) в области (5), (27) имеет место оценка

$$\|\bar{c}^{(4n)}(\tau)\| \leqslant K_3e^{-3n\alpha\tau} \quad \tau \in [0, \infty), K_3 > 0. \tag{60}$$

Константа K_3 зависит от области (5), (27).

Рассмотрим систему (25), замкнутую найденным вспомогательным управлением $\upsilon(\tau)$ при условии, что в правую часть ее первых n уравнений подставлена функция $\bar{d}(\tau)$, введенная в постановке Задачи 2. Ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}^{(4n)}}{d\tau} &= C\bar{c}^{(4n)} + \bar{\bar{Q}}(\bar{d} - d) + \bar{R}_1(c^{(4n)}, \bar{d}, \tau)+ \\ &+ \bar{R}_2(c^{(4n)}, d, \tau)+ \\ &+ (\bar{R}_2(c^{(4n)}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(c^{(4n)}, d, \tau))+ \\ &+ \bar{R}_3(c^{(4n)}, d, \tau)+ \\ &+ (\bar{R}_3(c^{(4n)}, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(c^{(4n)}, d, \tau))+ \\ &+ \bar{R}_4(c^{(4n)}, \bar{d}, \tau), \\ &\tau \in [0, +\infty), \quad \bar{\bar{Q}} = (Q, O_4)^T_{n+r\times r}. \end{aligned} \tag{61}$$

O_4 — матрица с нулевыми элементами соответствующей размерности.

На основании теоремы о среднем справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
&R_2^i(c^{(4n)}, \bar{d}, \tau) - R_2^i(c^{(4n)}, d, \tau) = \\
&= \left(\left(\frac{\partial R_2^i}{\partial d}(c^{(4n)}, \tilde{d}, \tau,) \right)^T, (d - \bar{d}) \right) = \\
&= \left(\left(\frac{\partial R_2^i}{\partial d}(c^{(4n)}, \tilde{d}, \tau,) \right)^T, \ \frac{d}{d\tau} d(\tilde{\tau}) h \right), \\
&R_3^i(c^{(4n)}, \bar{d}, \tau) - R_3^i(c^{(4n)}, d, \tau) = \\
&= \left(\left(\frac{\partial R_3^i}{\partial d}(c^{(4n)}, \tilde{d}, \tau,) \right)^T, (d - \bar{d}) \right) = \\
&= \left(\left(\frac{\partial R_3^i}{\partial d}(c^{(4n)}, \tilde{d}, \tau,) \right)^T, \ \frac{d}{d\tau} d(\tilde{\tau}) h \right), \\
&\tilde{d} = (\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_r), \ \tilde{d} = \bar{d} + \tilde{\theta}_i (d - \bar{d}), \\
&\tilde{\theta}_i \in [0, 1], \ i = 1, \ldots, n, \\
&\tilde{\tau} \in \left(-\frac{1}{\alpha} \ln(1 - t + h), -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - t) \right), \\
&t \in [0, \tilde{t}], \ 0 < \tilde{t} < 1, \ 1 - \tilde{t} < \varepsilon,
\end{aligned}
\tag{62}
$$

где $\tilde{t}$ подлежит определению.

Далее из условий (23), (31) и (60) следует, что в области (5), (27) справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
&\|v(\tilde{\tau})\| = \left\| \frac{d}{d\tau} d(\tilde{\tau}) \right\| \leqslant \|M(\tilde{\tau})\| \|\bar{c}^{(4n)}(\tilde{\tau})\| \leqslant \\
&\leqslant K_4 e^{-2n\alpha\tilde{\tau}} = K_4 e^{-2n\alpha\tau} e^{2n\alpha(\tau - \tilde{\tau})} \leqslant \\
&\leqslant K_4 e^{-2n\alpha\tau} e^{2n\alpha\bar{h}} = K_5(\bar{h}) e^{-2n\alpha\tau},
\end{aligned}
\tag{63}
$$

$$
K_5 > 0, \quad K_5(\bar{h}) = K_4 e^{2n\alpha h},
$$

$$
\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_r),
$$

$$\tilde{\tau}_j \in \left(-\frac{1}{\alpha}\ln(1-t+h), -\frac{1}{\alpha}\ln(1-t)\right), j=\overline{1,r},$$

$$\bar{h}(\tilde{t},h) = \max_{t\in[0,\tilde{t}]}\left(\frac{1}{\alpha}|\ln(1-t)-\ln(1-t+h)|\right).$$

Очевидно,

$$\bar{h}(\tilde{t},h)\to 0 \quad \text{as} \quad h\to 0 \quad \forall \tilde{t}\in[0,1). \tag{64}$$

В (63) константа K_5 зависит от $\tilde{t}$, но не зависит от момента времени $t\in[0,\tilde{t}]$.

В результате из условий (62), (63) получим

$$\begin{gathered}
\|u(t(\tau)-h)-u(t(\tau))\| = \|\bar{d}(\tau)-d(\tau)\| \leqslant \\
\leqslant K_6K_5(\bar{h})e^{-2n\alpha\tau}h,\ K_6>0, \\
\|R_2(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-R_2(c^{(4n)},d,\tau)\| \leqslant \\
\leqslant K_7K_5(\bar{h})e^{-2n\alpha\tau}h,\ K_7>0, \\
\|R_3(c^{(4n)},\bar{d},\tau)-R_2(c^{(4n)},d,\tau)\| \leqslant \\
\leqslant K_8K_5(\bar{h})e^{-2n\alpha\tau}h,\ K_8>0 \\
\tau\in[0,-\frac{1}{\alpha}\ln(1-\tilde{t})].
\end{gathered} \tag{65}$$

В (65) константы K_6, K_7, K_8 зависят от области (5), (27), но не зависят от времени τ.

Ограничем область изменения h неравенством:

$$0<h<h_0. \tag{66}$$

В (66) $0<h_0<1$ фиксированное число.

Рассмотрим систему (61) на конечном промежутке $[0,\tilde{\tilde{\tau}}]$, $\tilde{\tilde{\tau}} = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-\tilde{t})$. В дальнейшем при необходимости величину $\tilde{\tilde{\tau}}$ будем увеличивать так, чтобы оставалось выполненым ограничение

$$e^{-\alpha\tilde{\tilde{\tau}}}<\varepsilon. \tag{67}$$

Покажем, что все решения системы (61), начинающиеся в достаточно малой окрестности начала координат, при достаточно малых $h>0, F>0$ удовлетворяют условию

$$\|\bar{c}^{4n}(\tilde{\tilde{\tau}})\|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{68}$$

Выполним в системе (61) замену переменной $\bar{c}^{(4n)}$ по формуле (49). В результате получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{d\tau} = Dz + e^{n\alpha\tau}\bar{\bar{Q}}(\bar{d} - d) + e^{n\alpha\tau}\bar{R}_1(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) + \\
&+ \bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}(\bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_2(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, e^{-n\alpha\tau}z_2, \tau) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}(\bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau) - \bar{R}_3(e^{-n\alpha\tau}z_1, d, \tau)) + \\
&+ e^{n\alpha\tau}\bar{R}_4(e^{-n\alpha\tau}z_1, \bar{d}, \tau).
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Решение системы (69) с начальными данными (49), (26), (22) при $\|\bar{x}\| \leqslant \bar{\varepsilon}_2$, $\|F\| \leqslant \bar{\varepsilon}_2$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
z(\tau) = {} & \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)z(\tau_1) + \\
& + \int\limits_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{\bar{Q}}(\bar{d} - d) + \\
& + \bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + (\bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t) - \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, d, t)) + \\
& + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + (\bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t) - \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, d, t)) + \\
& + \bar{R}_4(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t)]dt, \quad \tau \in [\tau_1, \tilde{\bar{\tau}}],
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
z(\tau) = {} & \Phi_1(\tau)\bar{c}^{(4n)}(0) + \\
& + \int\limits_0^\tau \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}[\bar{\bar{Q}}(\bar{d} - d) + \\
& + \bar{R}_1(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + (\bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t) - \bar{R}_2(e^{-n\alpha t}z_1, d, t)) + \\
& + \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, e^{-n\alpha t}z_2, t) + \\
& + (\bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t) - \bar{R}_3(e^{-n\alpha t}z_1, d, t)) + \\
& + \bar{R}_4(e^{-n\alpha t}z_1, \bar{d}, t)]dt, \quad \tau \in [0, \tau_1].
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Предположим, что решение (69), определенное формулами (70), (71) принадлежит области (5), (27). Тогда из (70), (71) с учетом (65), (63), (62), (60), (51), (29) следуют оценки

$$
\begin{aligned}
& \|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\beta(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\| + \\
& + K\int\limits_{\tau_1}^\tau e^{-\beta(\tau-t)}(\bar{L}\|z\| + L_4(F) + K_9(\bar{h})h)e^{-\alpha t}dt,
\end{aligned}
\tag{72}
$$

$$
\tau \in [\tau_1, \tilde{\tilde{\tau}}],
$$

$$
\begin{aligned}
& \|z(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}\|c^{(4n)}(0)\| + \\
& + K\int\limits_0^\tau e^{-\beta(\tau-t)}(\bar{L}\|z\| + L_4(F) + K_9(\bar{h})h)e^{-\alpha t}dt,
\end{aligned}
\tag{73}
$$

$$
\tau \in [0, \tau_1],
$$

где $\bar{K} = Ke^{(n-1)\alpha\tau_1}$. В (72), (73) константа $K_9 > 0$ зависит от области (5), (27), (66) и $\tilde{t}$. Применяя к (72), (73) известный результат [1] получим

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\|+ \\ + K\int\limits_{\tau_1}^{\tau} e^{-\mu(\tau-t)}(L_4(F)+K_9(\bar{h})h)e^{-\alpha t}dt, \tag{74}$$

$$\tau \in [\tau_1, \tilde{\tilde{\tau}}], \quad \mu = \beta - K\bar{L}e^{-\alpha\tau_1},$$

$$\|z(\tau)\| \leqslant Ke^{-\mu_1\tau}\|c^{(4n)}(0)\|+ \\ + K\int\limits_{0}^{\tau} e^{-\mu_1(\tau-t)}(L_4(F)+K_9(\bar{h})h)e^{-\alpha t}dt, \tag{75}$$

$$\tau \in [0, \tau_1], \quad \mu_1 = \beta - K\bar{L}.$$

Увеличивая $\tilde{\tilde{\tau}}$ в области (67), если это необходимо, зафиксируем $\tau_1, 0 < \tau_1 < \tilde{\tilde{\tau}}$ так, чтобы было выполнено неравенство $\mu > 0$.

Основываясь на рассуждениях, приведенных при выводе оценок (58), (59) из (74), (75) получим неравенства

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{K}e^{-\mu(\tau-\tau_1)}\|z(\tau_1)\|+ \\ + e^{-\alpha\tau}(K_{10}L_4(F)+K_{11}(\tilde{\tilde{\tau}},\bar{h})h), \quad \tau \in [\tau_1, \tilde{\tilde{\tau}}], \tag{76}$$

$$\|z(\tau)\| \leqslant K\|c^{(4n)}(0)\|+ \\ + K_{12}L_4(F)+K_{11}(\tilde{\tilde{\tau}},\bar{h})h, \quad \tau \in [0, \tau_1]. \tag{77}$$

В (76), (77) константы $K_i, K_i > 0, i = 10, 11, 12, 13$ зависят от области (5), (27), (66) и $\tilde{\tilde{\tau}}$.

Из неравенств (76), (77), следует, что если функция $z(\tau)$ на интервале $[0, \tilde{\tilde{\tau}}]$ принадлежит области (5), (27), то она экспоненциально убывает на промежутке $\tau \in [\tau_1, \tilde{\tilde{\tau}}]$. Зафиксируем $\tilde{\tilde{\tau}}$, $\tilde{\tilde{\tau}} > \tau_1 > 0$ в области (67) так, чтобы было выполнено

$$\|z(\tilde{\tilde{\tau}})\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{78}$$

Используя (77), (76), (64), (26), (22), свойства функции $L_4(F)$ и $K_i(\tilde{\tilde{\tau}},\bar{h})h \to 0$ as $h \to 0$, $i = 11, 13$, можно выбрать $\bar{\varepsilon}_0^1$, $\bar{\varepsilon}_0^2$, $\bar{\varepsilon}_0^3$,

$0 < \bar{\varepsilon}_0^1 < \bar{\varepsilon}_2$, $0 < \bar{\varepsilon}_0^2 < \bar{\varepsilon}_2$, $0 < \bar{\varepsilon}_0^3 < h_0$ так чтобы $\forall \bar{x}, F, h : \|\bar{x}\| \leqslant \bar{\varepsilon}_0^1, \|F\| \leqslant \bar{\varepsilon}_0^2, 0 < h < \bar{\varepsilon}_0^3$ функция $z(\tau)$ удовлетворяла оценке (78) и принадлежала области (5), (27). Формула (49) дает известные функции $\bar{c}^{(4n)}(\tau)$, $\upsilon(\tau)$, $\tau \in [0, \tilde{\bar{\tau}}]$, удовлетворяющие системе (61), (25), (20) (в первых n уравнениях $d = \bar{d}$), начальные данные (26) и оценка (68).

Возвращаясь в первой компоненте функции $\bar{c}^{(4n)}$ к переменной c по формулам (19), (16), (13) будем иметь функции $c(\tau)$, $d(\tau)$, $\upsilon(\tau)$. Из равенств (19), (16), (13) следует, что можно выбрать $\bar{\bar{\varepsilon}}_0^2 : 0 < \bar{\bar{\varepsilon}}_0^2 < \bar{\varepsilon}_0^2$ так, чтобы $\forall \bar{x}, F, h : \|\bar{x}\| \leqslant \bar{\varepsilon}_0^1, \|F\| \leqslant \bar{\bar{\varepsilon}}_0^2, 0 < h < \bar{\varepsilon}_0^3$ выполнялось условие

$$\|c(\tilde{\bar{\tau}})\| < \varepsilon. \tag{79}$$

Если положить $\bar{\tau} = \tilde{\bar{\tau}}$, то из (79) и в силу построения систем (25), (20) соответствующая пара $c(\tau), \bar{d}(\tau)$ будет решение Задачи 2.

Переход в функциях $c(\tau), d(\tau), \bar{d}(\tau), \upsilon(\tau)$ к исходной независисмой переменной t по формулам (7), (9) даст известные функции $x(t)$, $u(t)$, $u(t-h)$, $\bar{v}(t)$, которые удовлетворяют системе (33) и начальным условиям (6). В свою очередь пара функций $x(t)$, $u(t-h)$, $t \in [0, \bar{t}]$, $\bar{t} = 1 - e^{-\alpha\bar{\tau}}$ в силу Замечания 1 и построения системы (33) является решение Задачи 1. Пусть $\varepsilon_0^1 = \bar{\varepsilon}_0^1$, $\varepsilon_0^2 = \bar{\bar{\varepsilon}}_0^1$, $\varepsilon_0^3 = \bar{\varepsilon}_0^3$. Теорема доказана.

Алгоритм решения поставленной задачи состоит из следующих этапов:

1. Построение вспомогательной системы (25). Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

2. Решение задачи стабилизации для системы (30). Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

3. Решение задачи Коши для системы (25) с начальными данными (26), замкнутой стабилизирующим управлением $\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{c}^{(4n)}$, полученном в пункте 2. Выполняется численными методами. В результате получим известную функцию $\upsilon(\tau)$.

4. Замена переменной τ на t и подстановка в найденную в п.3 функцию $\bar{v}(t) = \varepsilon(\tau(t))$. Выполняется аналитическими методами и реализуется средствами компьютерной алгебры.

5. Решение задачи Коши для системы (33) с начальными данными (6) на промежутке $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} = 1 - e^{-\alpha\bar{\tau}}$. Выполняется численными методами. В результате получим известные функции $x(t), u(t)$ которые являются решением Задачи 1.

3.4 Решение задачи управления однозвенным манипулятором с учетом запаздывания управления.

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу управления однозвенным роботом-манипулятором при переносе груза в заданную точку. В соответствии с [9], система уравнений, описывающая движение манипулятора с учетом возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2 + u(t-h) + F, \end{aligned} \tag{80}$$

где x_1 — угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 — скорость изменения угла отклонения, $a_1 = \bar{\alpha} L^{-2} m_1^{-1}$, $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$, $a_2 = gL^{-1}\left(m_0 + \frac{M}{2}\right) m_1^{-1}$, M — масса манипулятора, L — длина манипулятора, g — ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ — коэффициент трения, m_0 — масса переносимого груза, F — возмущение, $x = (x_1, x_2)^T$, управление u скалярно. Рассмотрим граничные условия

$$\begin{aligned} &x(0) = \bar{x}, \quad u(t) \equiv 0, \text{ при } t \in [-h, 0], \\ &\|x(\bar{t})\| \leqslant \varepsilon, \quad 1 - \bar{t} \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{81}$$

Аналог системы (8) и условия (9) для задачи (80), (81) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \\ \frac{dc_2}{d\tau} &= -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2 + \\ &\quad + \alpha e^{-\alpha\tau} d + \alpha e^{-\alpha\tau} F, \end{aligned} \tag{82}$$

$$
\begin{aligned}
&c_i(0)=\bar{x}_i, i=1,2,\\
&\bar{d}(\tau)\equiv 0, \tau\in\left[-\frac{1}{\alpha}\ln(1+h),0\right],\\
&\|\bar{c}_i(\tau)\|\leqslant\varepsilon,\quad e^{-\alpha\bar{\tau}}\leqslant\varepsilon,\bar{\tau}>0.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Для решения задачи (82), (83) достаточно выполнить преобразования

$$
\begin{aligned}
&c_2(\tau)=c_2^{(1)}(\tau)-e^{-\alpha\tau}F,\\
&c_1(\tau)=c_1^{(1)}(\tau)+\frac{1}{2}Fe^{-2\alpha\tau},\\
&c_2^{(1)}(\tau)=c_2^{(2)}(\tau)+\frac{1}{2}Fa_1e^{-2\alpha\tau},\\
&c_1^{(1)}(\tau)=c_1^{(2)}(\tau)+\frac{1}{6}Fa_1e^{-3\alpha\tau},\\
&c_2^{(2)}(\tau)=c_2^{(3)}(\tau)-\frac{1}{6}Fa_1e^{-3\alpha\tau}.
\end{aligned}
$$

В результате аналог системы (20), (23) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{dc_1^{(2)}}{d\tau}=\alpha e^{-\alpha\tau}c_2^{(3)}-\frac{1}{6}\alpha a_1Fe^{-4\alpha\tau},\\
&\frac{dc_2^{(3)}}{d\tau}=-\alpha e^{-\alpha\tau}a_2\sin\left(c_1^{(2)}+\frac{1}{6}Fa_1e^{-3\alpha\tau}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}Fe^{-2\alpha\tau}\right)-\alpha e^{-\alpha\tau}a_1c_2^{(3)}+\\
&\qquad+\alpha e^{-\alpha\tau}d+\frac{1}{6}\alpha e^{-4\alpha\tau}a_1^2F,\\
&\frac{d}{d\tau}d(\tau)=\upsilon.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Линейная часть системы (84) может быть записана в форме

$$
\frac{d\bar{c}}{d\tau}=\bar{P}\bar{c}+\bar{Q}\upsilon,\quad \bar{c}=(c_1^{(1)},c_2^{(2)},d)^T,
\tag{85}
$$

$$
\bar{P}=\begin{pmatrix}0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & 0\\ -\alpha e^{-\alpha\tau}a_2 & -\alpha e^{-\alpha\tau}a_1 & \alpha e^{-\alpha\tau}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \bar{Q}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.
$$

Матрицы S, $S^{-1}(\bar{P}S-\frac{dS}{d\tau})$, T, δ имеют вид

$$S=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha^2 e^{-2\alpha\tau}\\ 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & -\alpha^2 e^{-2\alpha\tau}a_1+\alpha^2 e^{-\alpha\tau}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\bar{S}=S^{-1}\left(\bar{P}S-\frac{dS}{d\tau}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \varphi_1(\tau)\\ 1 & 0 & \varphi_2(\tau)\\ 0 & 1 & \varphi_3(\tau)\end{pmatrix},$$

$$\varphi_1(\tau)=0,$$
$$\varphi_2(\tau)=-\alpha^2(-e^{-\alpha\tau}a_1+e^{-2\alpha\tau}a_2+2),$$
$$\varphi_3(\tau)=-\alpha(e^{-\alpha\tau}a_1-3),$$

$$T=\begin{pmatrix}1 & -\varphi_3(\tau) & -\left(\frac{d\varphi_3(\tau)}{d\tau}+\varphi_2(\tau)\right)\\ 0 & 1 & -\varphi_3(\tau)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\delta=(\delta_2,\delta_1,\delta_0),$$

$$\delta_2=(-\gamma_2-\varphi_3),$$

$$\delta_1=(-\gamma_1-2\frac{d\varphi_3}{d\tau}-\varphi_2),$$

$$\delta_0=(-\gamma_0-\frac{d^2\varphi_3}{d\tau^2}-\frac{d\varphi_2}{d\tau}),$$

где $\gamma_2,\gamma_1,\gamma_0$ выбраны так, что корни $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ характеристического уравнения $\lambda^3+q_2\lambda^2+q_1\lambda+q_0=0$ лежали в левой полуплоскости. Пусть $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-3$. Отсюда $q_2=6$, $q_1=11$, $q_0=6$. Используя матрицы S, $\bar{S}$, T и формулу (43), получим функцию

$$\upsilon(\tau)=M(\tau)\bar{c}, \qquad (86)$$

$$M(\tau)=\delta T^{-1}S^{-1},$$

где

$$M(\tau)=(m_1(\tau),m_2(\tau),m_3(\tau)),$$

$$m_1(\tau)=-\frac{1}{\alpha^2}e^{2\alpha\tau}(e^{-3\alpha\tau}a_1a_2\alpha^3-3e^{-2\alpha\tau}a_2\alpha^3-$$
$$-6e^{-2\alpha\tau}a_2\alpha^2+8\alpha^3+24\alpha^2+22\alpha+6)$$

$$m_2(\tau) = -\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\tau}(e^{-\alpha\tau}a_1^2\alpha^2 - e^{-2\alpha\tau}a_2\alpha^2 -$$
$$3e^{-\alpha\tau}a_1\alpha^2 - 6e^{-\alpha\tau}a_1\alpha + 7\alpha^2 + 18\alpha + 11)$$
$$m_3(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}a_1 - 3\alpha - 6,$$

которая обеспечивает стабилизацию системы (85).

Затем решаем задачу Коши для системы (84), замкнутой управление (86) с начальными данными

$$c_1^{(2)}(0) = \bar{x}_1 - \frac{1}{2}F - \frac{1}{6}Fa_1, \quad c_2^{(3)}(0) = \bar{x}_2 + F - \frac{1}{3}Fa_1,$$
$$d(0) = 0.$$

В результате получим известную функцию $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty)$. После замены независимой переменной по формуле (7) найдем известную функцию $\bar{v}(t) = v(\tau(t))$, $t \in [0, \bar{t}]$.

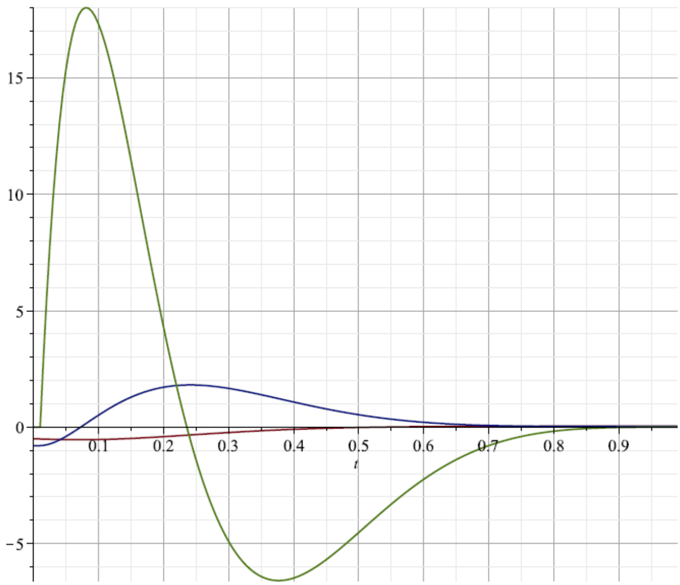

Рис. 1.2.

На заключительном этапе находим решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2, \\
\dot{x_2} &= -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2 + u(t-h) + F, \\
\dot{u} &= \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\bar{v}(t)
\end{aligned}$$

на промежутке $[0, \bar{t}]$ с начальными данными

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad u(t) \equiv 0, t \in [-h, 0].$$

В результате получим известные функции $x_1(t), x_2(t), u(t-h)$, которые являются решением Задачи 1.

В процессе численного моделирования находилось решение Задачи 1 при $\bar{x}_1 = -0.5$ рад, $\bar{x}_2 = -0.8$ рад/сек, $\bar{\alpha} = 0.1$, $\alpha = 0.25$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $\varepsilon = 0.05$, $\bar{t} = 0.9$ сек, $F = 0.1$ Н, $h = 0.01$ сек. На рисунке представлены графики управления $u(t)$ и соответствующих функций фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ от исходной независимой переменной t.

ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

§1. Решение задачи стабилизации нелинейной стационарной системы в классе дифференцируемых управлений

Объектом исследования является нелинейная управляемая стационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

$$x = (x^1,\ldots,x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1,\ldots,u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0,\infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1,\ldots,f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$\|u\| < C_1, \quad \|x\| < C_2. \tag{4}$$

1^0. *Случай полной управляемости линейной части системы*

Пусть выполнено условие

$$rank\ (B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n, \tag{5}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,r.$$

Задача 1.1 Найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих системе (3) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad x_0 = (x_0^1,\ldots,x_0^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Указанную пару функций $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (3), (4).

Справедлива теорема:

Теорема 1.1 *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (5). Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любого* $x_0 : \|x_0\| < \varepsilon$ *существует решение Задачи 1.1, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы с последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки указанных систем совпадают с порядком исходной системы).*

Доказательство. Используя свойства (2), (3) и разлагая правую часть системы (3) в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим систему

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0)x^j + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0)u^j +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j x^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j u^k +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})u^j u^k,$$

где

$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0,1), \quad i = \overline{1,n}.$$

Введем обозначение

$$\varphi^i(x,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j x^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j u^k +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})u^j u^k, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда система (1) примет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x,u), \tag{7}$$
$$\varphi(x,u) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^T.$$

Рассмотрим линейную часть системы (7)

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{8}$$

Применяя известный алгоритм, найдем управление $u(t)$ вида

$$u(t) = Cx(t), \tag{9}$$

где C – постоянная матрица размерности $[r \times n]$, обеспечивающее экспоненциальную устойчивость системе (8). Это означает, что для решений системы (8), замкнутой управлением (9), имеет место оценка

$$\|x(t)\| \leqslant M\|x_0\|e^{-\lambda t}, \quad M > 0, \quad \lambda > 0. \tag{10}$$

Замкнем систему (7) управлением (9) и запишем полученный результат в виде

$$\dot{x} = (A + BC)x + \varphi(x, Cx). \tag{11}$$

Поскольку функции $\varphi^i(x, Cx)$ являются квадратичными формами по x с переменными коэффициентами, то в области (5) имеет место оценка

$$\|\varphi(x, Cx)\| \leqslant L\|x\|^2, \tag{12}$$

где $L > 0$ – константа. Система (8), замкнутая полученным управлением (9), имеет вид

$$\dot{x} = (A + BC)x \tag{13}$$

и является экспоненциально устойчивой. Пусть $\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$ – фундаментальная матрица системы (13). Тогда на основании (10) выполняется оценка

$$\|\Phi(t)\| \leqslant Ke^{-\lambda t}, \quad K > 0, \quad \lambda > 0. \tag{14}$$

Решение системы (11) с начальными данными (4) имеет вид

$$x(t, x_0, 0) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\varphi(x, Cx)\, d\tau. \tag{15}$$

Оценим норму этого решения

$$\|x(t)\| \leqslant \|\Phi(t)\|\|x_0\| + \int_0^t \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\|\|\varphi(x, Cx)\|\, d\tau. \tag{16}$$

Из условий (12), (14) и свойства

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\| \leqslant Ke^{-\lambda t}e^{\lambda\tau}$$

получим оценку нормы решения в виде

$$\|x(t)\| \leqslant Ke^{-\lambda t}\|x_0\| + \int_0^t KLe^{-\lambda t}e^{\lambda\tau}\|x\|^2\,d\tau. \tag{17}$$

Выберем константу $C_3 : 0 < C_3 < C_2$. Тогда в области

$$\|x\| \leqslant C_3 \tag{18}$$

справедливо неравенство

$$\|\varphi(x, Cx)\| \leqslant L\|x\|^2 \leqslant LC_3\|x\|. \tag{19}$$

Далее с учетом (19) получим

$$\|x(t)\| \leqslant Ke^{-\lambda t}\|x_0\| + KLC_3\int_0^t e^{-\lambda t}e^{\lambda\tau}\|x\|\,d\tau. \tag{20}$$

откуда согласно [2] получим

$$\|x(t)\| \leqslant K\|x_0\|e^{-(\lambda-KLC_3)t}. \tag{21}$$

Обозначим $\mu = \lambda - KLC_3$. Выберем $C_3 > 0$ так, чтобы $\mu > 0$. Тогда для всех x_0, принадлежащих области

$$\|x_0\| \leqslant \frac{C_3}{K} \tag{22}$$

решения системы (1), замкнутой управлением (9), с начальными данными $x(0) = x_0$ экспоненциально убывают и не покидают области (18).

Теперь выберем x_0 так, чтобы выполнялось ограничение (4) на управление $u(t)$. Легко видеть

$$\|u(t)\| = \|Cx(t)\| \leqslant \|C\|\cdot\|x(t)\| \leqslant \|C\|Ke^{-\mu t}\|x_0\|.$$

Отсюда при ограничениях на начальные данные

$$\|x_0\| \leqslant \frac{C_1}{\|C\|K} \tag{22$'$}$$

следует, что управление $u(t)$ будет удовлетворять ограничению (5). На основании изложенного следует, что в качестве $\varepsilon > 0$ можно взять величину

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{C_3}{K}, \frac{C_1}{\|C\|K}\right\}.$$

Теорема доказана.

Описание алгоритма решения Задачи 1.1.

1. Решаем задачу непрерывной стабилизации системы (8).

2. Задаем величину $\lambda > 0$.

3. Строим нормированную в нуле фундаментальную матрицу решений системы (13) $\Phi(t)$ и оцениваем ее норму при $t = 0$. Полученное значение присваиваем константе K.

4. По заданной константе C_2 находим величину L.

5. Выбираем константу $C_3 : 0 < C_3 < C_2$ так, чтобы $\mu > 0$.

6. Из условий (22) и (22′) находим допустимые значения x_0.

7. Замыкаем исходную систему управлением (9) и интегрируем ее с начальным условием $x(0) = x_0$. В результате интегрирования получаем соответствующую управляющей функции $u(t)$ функцию изменения фазовых координат $x(t)$.

2^0. *Случай неполной управляемости линейной части системы*

Пусть после аналогичных действий над правыми частями исходной системы (3) мы представили ее в форме (7).

Пусть теперь

$$rank\ (B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = m < n, \tag{23}$$

то есть линейная часть системы (7) не является полностью управляемой.

Задача 1.2 Найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{24}$$

Указанную пару функций $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (24).

Рассмотрим линейную часть системы (7) (система (8)) и прежде чем сформулировать теорему, проведем следующие необходимые преобразования.

В системе (8) сделаем замену переменных по формуле

$$x = Sy, \quad S = (s_1, \ldots, s_m, \tilde{s}_{m+1}, \ldots, \tilde{s}_n). \tag{25}$$

Здесь $s_1, \ldots, s_m$ – базис линейной оболочки столбцов матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$, а $\tilde{s}_{m+1}, \ldots, \tilde{s}_n$ – его дополнение до базиса пространства R^n. После подстановки (25) получим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ O_2 \end{pmatrix} u. \tag{26}$$

Здесь $y = (y_1, y_2)^T$ – разбиение вектора y на два вектора y_1 и y_2 размерностей m и $n-m$ соответственно; блок A_{11} размерности $[m \times m]$, A_{12} – $[m \times (n-m)]$, A_{22} – $[(n-m) \times (n-m)]$, B_1 – $[m \times r]$, O_{21} и O_2 – матрицы, состоящие из нулевых элементов, размерностей $[(n-m) \times m]$ и $[(n-m) \times r]$ соответственно.

Рассмотрим две подсистемы

$$\dot{y}_1 = A_{11}\, y_1 + B_1\, u, \tag{27}$$

$$\dot{y}_2 = A_{22}\, y_2. \tag{28}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2 *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (23), а также система (28) экспоненциально устойчива (или, что то же самое, собственные числа матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $x_0 : \|x_0\| < \varepsilon$ существует решение Задачи 1.2, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы с последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Используя известный алгоритм [2], найдем управление вида

$$u(t) = Cy_1(t),$$

где C – постоянная матрица размерности $[r \times m]$, обеспечивающее экспоненциальную устойчивость системе (27). Управление $u(t)$ в старых переменных имеет вид

$$u(t) = CS_m^{-1}x(t), \tag{29}$$

где S_m^{-1} – матрица, состоящая из соответствующих первых m строк матрицы S^{-1}. Если замкнуть теперь систему (8) управлением (29), то для ее решений $x(t)$ с начальными данными $x(0) = x_0$ будет иметь место оценка

$$\|x(t)\| \leqslant M_1\|x_0\|e^{-\lambda t}, \quad M_1 > 0, \quad \lambda > 0. \tag{30}$$

Далее доказательство полностью повторяет доказательство Теоремы 1.1.

§2. Решение задачи стабилизации в классе дискретных управлений

Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \ldots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \ldots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$rank\ (B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n, \tag{4}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r,$$

$$\|u\| < C_1. \tag{5}$$

Определение. Управление $u(t)$ называется *дискретным*, если

$$u(t) = u(kh), \quad \forall t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $h > 0$ – постоянная величина.

Задача 2.1 Найти дискретное управление $u(t)$ так, чтобы решение системы (1) $x(t)$ удовлетворяло условиям

$$x(0) = x_1, \quad x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Указанную пару $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (6).

Теорема 2.1 *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2),(3),(4). Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для любых*

$x_1 : \|x_1\| < \varepsilon$ и для любых $h : 0 < h < h_0$ существует решение Задачи 2.1, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки указанных систем совпадают с порядком исходной системы).

Доказательство. Используя свойства (2), (3), систему (1) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x, u) + \varphi_1(x, u), \tag{7}$$

$$\varphi(x, u) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^T,$$

$$\varphi_1(x) = (\varphi_1^1, \ldots, \varphi_1^n)^T,$$

$$\varphi^i(x, u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u}) x^j u^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u}) u^j u^k, \tag{8}$$

$$\varphi_1^i(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x}, \tilde{u}) x^j x^k,$$

$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \theta_i \in (0, 1), \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0, 1), \quad i = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим линейную часть системы (7)

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{9}$$

Используя условие (4) и известный алгоритм, найдем управляющую функцию $u(t)$ вида

$$u(t) = Cx(t), \tag{10}$$

где C – постоянная матрица размерности $[r \times n]$, обеспечивающую экспоненциальную устойчивость системы (9). Наряду с системой (7), рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x, u). \tag{11}$$

Система (11), замкнутая дискретным управлением

$$u = Cx(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

примет вид

$$\dot{x} = Ax + BCx(kh) + \varphi(x, Cx(kh)). \tag{13}$$

Введем в рассмотрение функцию $z(t)$

$$z(t) = x(t) - x(kh) = x(t) - x_k, \quad x_k = x(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{14}$$

Решение системы (13) на промежутке $[kh, (k+1)h]$ имеет вид

$$\begin{gathered} x(t) = e^{A(t-kh)} x_k + e^{At} \int\limits_{kh}^{t} e^{-A\tau} \big(BCx_k + \varphi(x, Cx_k)\big)\, d\tau, \\ t \in [kh, (k+1)h]. \end{gathered} \tag{15}$$

Сделаем в (15) замену независимой переменной t на θ по формуле $t - kh = \theta$. Тогда при $\theta \in [0, h]$ получим

$$\begin{gathered} x(\theta + kh) = e^{A\theta} x_k + e^{A(\theta+kh)} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-A(\tau+kh)} \big(BC + \varphi(x, Cx_k)\big)\, d\tau, \\ \theta \in [0, h]. \end{gathered} \tag{16}$$

Равенство (16) можно записать в виде

$$\begin{gathered} x(\theta + kh) = x_k + Ae^{A\xi} h x_k + \\ e^{A(\theta+kh)} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-A(\tau+kh)} \big(BCx_k + \varphi(x, Cx_k)\big)\, d\tau, \\ \theta \in [0, h], \quad \xi \in [0, h]. \end{gathered} \tag{17}$$

Подставив (17) в (14), получим

$$\begin{gathered} z(\theta + kh) = x(\theta + kh) - x(kh) = Ae^{A\xi} h x_k + \\ + e^{A(\theta+kh)} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-A(\tau+kh)} \big(BCx_k + \varphi(x, Cx_k)\big)\, d\tau, \\ \theta \in [0, h], \quad \xi \in [0, h]. \end{gathered} \tag{18}$$

Из (18) следует

$$\|z(\theta + kh)\| \leqslant \|A\| \|e^{A\xi}\| \|x_k\| h +$$
$$\|e^{A\theta}\| \int\limits_0^\theta \|e^{-A\tau}\| \|BCx_k + \varphi(x, Cx_k)\| \, d\tau, \tag{19}$$
$$\theta \in [0, h], \quad \xi \in [0, h].$$

Из (2), (8) следует, что в области

$$\|x\| < C_2 \tag{20}$$

справедлива оценка

$$\|\varphi(x, Cx_k)\| < K\|x_k\|. \tag{21}$$

В (20) $C_2 > 0$ – произвольная константа.

Используя (21), неравенство (19) можно записать в более компактном виде

$$\|z(t)\| \leqslant K_1 h \|x_k\| + K_2 h \|x_k\|. \tag{22}$$

В (22) константы K_1, K_2 не зависят от промежутка $[kh, (k+1)h]$. С другой стороны согласно (14)

$$\|x_k\| \leqslant \|x(t)\| + \|z(t)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{23}$$

Неравенства (22), (23) дают оценку

$$\|z(t)\| \leqslant \frac{(K_1 + K_2)h}{1 - (K_1 + K_2)h} \cdot \|x(t)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{24}$$

Система (9), замкнутая стабилизирующим управлением (10), имеет вид

$$\dot{x} = (A + BC)x. \tag{25}$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (25) существует положительно определенная квадратичная форма $V(x)$ [2] такая, что

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} = -\|x\|^2. \tag{26}$$

Производную $V(x)$ в силу системы (13) можно записать в виде

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} = -\|x\|^2 - (grad\, V, BCz) + \\ + \Big(grad\, V, \varphi\big(x, Cx(kh)\big) - \varphi(x, Cx)\Big) + \big(grad\, V, \varphi(x, Cx)\big). \tag{27}$$

В области (20) справедливы оценки

$$\|grad\, V\| \leqslant K_3\|x\|, \tag{28}$$

$$\|\varphi(x, Cx(kh)) - \varphi(x, Cx)\| \leqslant K_4\|x(kh) - x(t)\|. \tag{29}$$

Используя (27)–(29), получим оценку

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} \leqslant -\|x\|^2 + K_5\|x\|\|z\| + K_6\|x\|\|z\| + K_7\|x\|^3. \tag{30}$$

В (28)–(30) K_i, $i = \overline{3,7}$ – константы, зависящие от области (20).

Из (24), (30) следует

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} \leqslant -\|x\|^2 + \left(\frac{K_5(K_1+K_2)h}{1-(K_1+K_2)h} + \frac{K_6(K_1+K_2)h}{1-(K_1+K_2)h}\right)\|x\|^2 + K_7\|x\|^3. \tag{31}$$

Выберем константу C_3: $0 < C_3 < C_2$ и $h_0 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{K_5(K_1+K_2)h_0}{1-(K_1+K_2)h_0} + \frac{K_6(K_1+K_2)h_0}{1-(K_1+K_2)h_0} + K_7C_3 < 1 \tag{32}$$

Тогда $\forall h : 0 < h \leqslant h_0$ оценка (31) в области

$$\|x\| < C_3 \tag{33}$$

примет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} \leqslant -\gamma\|x\|^2, \quad \gamma > 0. \tag{34}$$

Производная функции $V(x)$ в силу исходной системы (7) имеет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7)} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} + \big(grad\, V, \varphi_1(x)\big). \tag{35}$$

Оценивая правую часть (35) в области (33), по аналогии с (28) с учетом (34) получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7)} \leqslant -\gamma\|x\|^2 + K_8\|x\|^3. \tag{36}$$

Выберем константу $C_4\colon\ 0 < C_4 < C_3$ так, чтобы

$$K_8 C_4 < \gamma. \tag{37}$$

Тогда в области

$$\|x\| < C_4 \tag{38}$$

справедливо неравенство

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7)} \leqslant -\gamma_1\|x\|^2, \quad \gamma_1 > 0. \tag{39}$$

С другой стороны согласно [2], функция $V(x)$ является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова (26), и для нее справедлива оценка

$$\alpha_1\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2\|x\|^2. \tag{40}$$

Константы α_1, α_2 определяются матрицей квадратичной формы $V(x)$. Из (39), (40) получим

$$\frac{d\,ln\,V}{dt} \leqslant -\frac{\gamma_1}{\alpha_2}. \tag{41}$$

Интегрируя (41) на промежутке $[0,t]$, получим

$$V(x) \leqslant V(x_1)e^{-\frac{\gamma_1}{\alpha_2}t}. \tag{42}$$

Окончательно условия (40) и (42) дают оценку

$$\|x(t,0,x_1)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|x_1\|e^{-\frac{\gamma_1}{2\alpha_2}t}, \quad t \in [0,\infty). \tag{43}$$

Пусть

$$\|x_1\| < C_4\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \tag{44}$$

$$\|x_1\| < \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{C_1}{\|C\|}. \tag{45}$$

Выберем

$$\varepsilon = \min\left\{ C_4 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{C_1}{\|C\|} \right\}.$$

Тогда из оценок (43) – (45) следует, что решение системы (7) не покидает области (38) и удовлетворяет ее граничным условиям (6), а соответствующее ему управление (12) удовлетворяет ограничению (5). Теорема доказана.

Описание алгоритма решения Задачи 2.1.

1. Решение задачи непрерывной стабилизации системы (9).
2. По заданной константе C_2 находим величину K.
3. Используя матрицы A и B, матрицу коэффициентов усиления стабилизирующего управления, полученного в п.1, находим константы K_1, K_2.
4. В области (20) находим константы K_3, K_4, K_5, K_6, K_7.
5. Выбираем константы C_3 и h_0, удовлетворяющие неравенству (32).
6. По выбранным h_0, C_3 находим константу γ.
7. Из условия (37) находим константу C_4.
8. По выбранному C_4 находим константу γ_1.
9. Решение уравнения Ляпунова дает матрицу квадратичной формы $V(x)$. Далее находим минимальное и максимальное собственные числа этой матрицы, которые соответствуют числам α_1 и α_2.
10. Используя полученные в предыдущих процедурах константы α_1, α_2, C_3 и $\|C\|$, из условий (45) находим допустимые значения x_1.

11. Замыкаем исходную систему управлением (12) с шагом дискретности $0 < h \leqslant h_0$ и интегрируем ее с начальным условием $x(0) = x_1$, удовлетворяющим неравенствам (44) – (45), на достаточно большом промежутке времени. В результате интегрирования получаем искомую управляющую функцию $u(kh)$ и соответствующую ей функцию изменения фазовых координат $x(t)$.

Замечание 2.1 Нетрудно видеть, что предложенный в работе алгоритм можно использовать в случае, когда условие (6) имеет вид

$$x(0) = x_0, \quad \|x(\hat{t})\| < \varepsilon_0, \tag{46}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – произвольное число, $\hat{t}$ – заранее неизвестный момент времени.

Задача 2.2 Найти функции $x(t)$, $u(kh)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad \|x(\hat{t})\| < \varepsilon_0, \tag{47}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – произвольное число, $\hat{t}$ – заранее неизвестный момент времени. Нетрудно видеть, что решение Задачи 2.1 на промежутке $[0, \hat{t}]$ дает решение Задачи 2.2 при $\hat{t}$, удовлетворяющем условию

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|x_0\|e^{-\frac{\gamma_1}{2\alpha_2}\hat{t}} \leqslant \varepsilon_0. \tag{48}$$

§3. Решение задачи стабилизации с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \dots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$rank\ (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \tag{4}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\|u\| < C. \tag{5}$$

Предположим, что доступен измерению вектор $y(t) \in R^m$, $m \leqslant n$,

связанный с фазовым вектором x уравнением

$$y(t) = g(x(t)), \tag{6}$$

где

$$g \in C^2(R^n; R^m), \quad g = (g^1, \dots, g^m)^T, \tag{7}$$

$$rank\{T^T, A^T T^T, \dots, A^{T\,n-1} T^T\} = n, \tag{8}$$

$$T = \{\frac{\partial g}{\partial x}(0)\}_{[m \times n]}.$$

Задача 3.1 Используя результаты измерения $y(t)$, найти непрерывное управление $u(t)$ так, чтобы решения системы (1) удовлетворяли условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{9}$$

Теорема 3.1 *Пусть для системы (1) и уравнения измерителя (6) выполнены условия (2)–(4), (7), (8). Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $x_0 \in R^n$*, удовлетворяющих неравенству* $\|x_0\| < \varepsilon$*, существует решение Задачи 3.1, которое может быть получено после решения задачи непрерывной стабилизации линейной стационарной системы и построения матрицы асимптотического наблюдателя типа Люенбергера.*

Доказательство. Будем искать уравнение асимптотического наблюдателя в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y(t) - g(\hat{x}(t))), \quad \hat{x} = (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)^T. \tag{10}$$

В уравнении (10) K – неизвестная постоянная матрица размерности $[n \times m]$, подлежащая определению. Используя свойства (2), (3), (7), системы (1) и (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x, u) + \varphi_1(x, u), \tag{11}$$

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^T, \quad \varphi_1 = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^n)^T, \tag{12}$$

$$\varphi^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u})x^j u^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u})u^j u^k, \tag{13}$$

$$\varphi_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x}, \tilde{u})x^j x^k,$$

$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0, 1) \quad i = 1, \dots n,$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x(t) - \hat{x}(t)) + K(g_1(x(t)) - g_1(\hat{x}(t))), \tag{14}$$

$$g_1 = (g_1^1, \dots, g_1^m),$$

$$g_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{\tilde{x}})x^j x^k, \tag{15}$$

$$\tilde{\tilde{x}} = \bar{\theta}_i x, \quad \bar{\theta}_i \in (0, 1), \quad i = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{16}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x - \hat{x}), \tag{17}$$

Будем искать постоянные матрицы $M_{r\times n}$, $K_{n\times m}$ так, чтобы система (16), (17), замкнутая управлением

$$u(t) = M\hat{x}(t), \tag{18}$$

была экспоненциально устойчивой.

Сделаем замену переменной $\hat{x}$ на δ по формуле

$$\hat{x} - x = \delta. \tag{19}$$

Тогда в новых переменных x, δ система (16), (17), замкнутая управлением (18), примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BM & BM \\ O_1 & A-KT \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В (20) O_1 – матрица, состоящая из нулевых элементов, размерности $[n \times n]$. Используя известный алгоритм непрерывной стабилизации линейных стационарных систем, найдем матрицу M, при которой спектр матрицы $A+BM$ лежит в левой полуплоскости. Чтобы подобрать матрицу K, гарантирующую расположение спектра матрицы $A-KT$ в левой полуплоскости, достаточно по упомянутому алгоритму найти матрицу K такую, чтобы спектр матрицы $-A^T + T^T K^T$ лежал в правой полуплоскости. Тогда из свойства произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем будет следовать, что спектр матрицы $A-KT$ лежит в левой полуплоскости. Отсюда и из структуры матрицы системы (20) следует экспоненциальная устойчивость системы (20) при выбранных матрицах M и K. С другой стороны, согласно замене (19), получим экспоненциальную устойчивость системы (16), (17), замкнутой управлением (18). Для удобства дальнейших рассуждений запишем ее в виде одного уравнения

$$\dot{\xi} = P\xi, \tag{21}$$

где

$$\xi = (x, \hat{x})^T, \quad P = \begin{pmatrix} A & BM \\ KT & A-KT+BM \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему (10), (11), замкнутую управлением (18),

$$\dot{x} = Ax + BM\hat{x} + \varphi(x, M\hat{x}) + \varphi_1(x, M\hat{x}), \tag{22}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BM\hat{x} + K(y(t) - g(\hat{x}(t))). \tag{23}$$

По аналогии с системой (16), (17) ее можно записать в виде одного уравнения
$$\dot{\xi} = Q\xi + \bar{\varphi}(\xi,\xi) + \bar{\varphi}_1(\xi,\xi). \tag{24}$$
Здесь
$$Q = \begin{pmatrix} A & BM \\ O & A+BM \end{pmatrix},$$
$$\bar{\varphi} = (\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi), K(g(\Gamma_1\xi) - g(\Gamma_2\xi)))^T, \tag{25}$$
$$\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi), 0, \ldots, 0)^T_{2n\times 1},$$
$$\Gamma_1 = (E, 0)_{n\times 2n}, \quad \Gamma_2 = (0, E)_{n\times 2n}.$$
Здесь O – матрица с нулевыми элементами размерности $[n \times n]$. Наряду с системой (24) рассмотрим систему
$$\dot{\xi} = Q\xi + \bar{\varphi}(\xi,\xi). \tag{26}$$
В силу экспоненциальной устойчивости системы (21), существует положительно определенная квадратичная форма $V(\xi)$ [2] такая, что
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(21)} = -\|\xi\|^2. \tag{27}$$
После несложных рассуждений нетрудно видеть, что производную $V(\xi)$ в силу системы (26) можно записать так
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} = -\|\xi\|^2 + (grad\, V, \Gamma_3\xi) + \big(grad\, V, \bar{\varphi}(\xi,\xi)\big), \tag{28}$$
где
$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} O & O \\ -KT & KT \end{pmatrix}.$$
В области
$$\|\xi\| < C_1 \tag{29}$$
справедлива оценка
$$\|grad\, V\| \leqslant \gamma_1\|\xi\|. \tag{30}$$
Используя (28) и (30), получим неравенство
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} \leqslant -\|\xi\|^2 + \gamma_2\|\xi\|^2 + \gamma_3\|\xi\|^3. \tag{31}$$

В (30) и (31) γ_i, $i = \overline{1,3}$ – положительные константы, зависящие от области (29). Выберем константу $0 < C_2 < C_1$ так, чтобы было выполнено

$$\gamma_2 + \gamma_3 C_2 < 1. \tag{32}$$

Тогда оценка (31) в области

$$\|\xi\| < C_2 \tag{33}$$

примет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} \leqslant -\gamma_4\|\xi\|^2, \quad \gamma_4 > 0. \tag{34}$$

Производную функции $V(\xi)$ в силу системы (24) можно записать так

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(24)} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} + \big(grad\, V, \bar{\varphi}_1(\xi,\xi)\big). \tag{35}$$

Оценивая правую часть (35) в области (33), с учетом (34), (13), (25) получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(24)} \leqslant -\gamma_4\|\xi\|^2 + \gamma_5\|\xi\|^3. \tag{36}$$

Здесь $\gamma_5 > 0$ – константа. Выберем константу C_3: $0 < C_3 < C_2$ так, чтобы

$$\gamma_5 C_3 < \gamma_4. \tag{37}$$

Тогда в области

$$\|\xi\| < C_3 \tag{38}$$

на основании (37) имеет место неравенство

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(24)} \leqslant -\gamma_6\|\xi\|^2, \quad \gamma_6 > 0. \tag{39}$$

С другой стороны, согласно [2], функция $V(\xi)$ является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова (27), и для нее справедлива оценка

$$\alpha_1\|\xi\|^2 \leqslant V(\xi) \leqslant \alpha_2\|\xi\|^2. \tag{40}$$

Константы $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ определяются матрицей квадратичной формы $V(\xi)$. Из (39), (40) следует

$$V(\xi) \leqslant V(\xi_0)e^{-\frac{\gamma_6}{\alpha_2}t}, \quad \xi_0 = (x(0), \hat{x}(0))^T, \quad t \in [0; +\infty). \tag{41}$$

Окончательно условия (40), (41) дают оценку

$$\|\xi(t, 0, \xi_0)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\xi_0\|e^{-\frac{\gamma_6}{2\alpha_2}t}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{42}$$

Пусть

$$\begin{gathered} \|\xi_0\| < C_3\sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \\ \|\xi_0\| < \sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tfrac{C}{\|M\|}. \end{gathered} \tag{43}$$

Положим

$$\varepsilon = \min\left\{C_3\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{C}{\|M\|}\right\}.$$

Тогда из оценок (42), (43) следует, что решение системы (24) не покидает области (38) и удовлетворяет условиям (9), а соответствующее ему управление (18) удовлетворяет ограничению (5). Теорема доказана.

§4. Решение задачи стабилизации с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта в классе дискретных управлений

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \ldots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \ldots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$rank\ (B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n, \tag{4}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r,$$

$$\|u\| < C. \tag{5}$$

Предположим, что в некоторые дискретные моменты времени

$$t = kh,\ h > 0,\ k = 0, 1, ...$$

доступен измерению вектор $y(kh) \in R^m$, $m \leqslant n$, связанный с фазовым вектором x уравнением

$$y(kh) = g(x(kh)), \tag{6}$$

где

$$g \in C^2(R^n; R^m), \quad g = (g^1, \ldots, g^m)^T, \tag{7}$$

$$rank\{T^T, A^T T^T, \ldots, A^{Tn-1} T^T\} = n, \tag{8}$$

$$T = \{\frac{\partial g}{\partial x}(0)\}_{[m \times n]}.$$

Определение. Управление $u(t)$ называется *дискретным*, если

$$u(t) = u(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, ..., \quad h > 0.$$

Задача 4.1 Используя результаты измерения $y(kh)$, $k = 0, 1, \dots$, $h > 0$, найти дискретное управление $u(t)$ так, чтобы решения системы (1) удовлетворяли условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{9}$$

Теорема 4.1 *Пусть для системы (1) и уравнения измерителя (6) выполнены условия (2)–(4), (7), (8). Тогда существуют* $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ *такие, что для всех* $x_0 \in R^n$, $h > 0$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\|x_0\| < \varepsilon, \quad 0 < h < h_0$$

существует решение Задачи 4.1, которое может быть получено после решения задачи непрерывной стабилизации линейной стационарной системы и построения матрицы асимптотического наблюдателя типа Люенбергера.

Доказательство. Будем искать уравнение асимптотического наблюдателя в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y(kh) - g(\hat{x}(kh))), \quad \hat{x} = (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)^T. \tag{10}$$

В уравнении (10) K – неизвестная постоянная матрица размерности $[n \times m]$, подлежащая определению. Используя свойства (2), (3), (7), системы (1) и (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x, u) + \varphi_1(x, u), \tag{11}$$

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^T, \quad \varphi_1 = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^n)^T, \tag{12}$$

$$\varphi^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u}) x^j u^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u}) u^j u^k, \tag{13}$$

$$\varphi_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x}, \tilde{u}) x^j x^k,$$

$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0,1), \quad i = 1, \dots n,$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x(kh) - \hat{x}(kh)) + K(g_1(x(kh)) - g_1(\hat{x}(kh))), \tag{14}$$

$$g_1 = (g_1^1, \dots, g_1^m),$$

$$g_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{\tilde{x}})x^j x^k, \tag{15}$$

$$\tilde{\tilde{x}} = \bar{\theta}_i x, \quad \bar{\theta}_i \in (0,1), \quad i = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{16}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x - \hat{x}), \tag{17}$$

Будем искать постоянные матрицы $M_{r\times n}$, $K_{n\times m}$ так, чтобы система (16), (17), замкнутая управлением

$$u(t) = M\hat{x}(t), \tag{18}$$

была экспоненциально устойчивой.

Сделаем замену переменной $\hat{x}$ на δ по формуле

$$\hat{x} - x = \delta. \tag{19}$$

Тогда в новых переменных x, δ система (16), (17), замкнутая управлением (18), примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BM & BM \\ O_1 & A - KT \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В (20) O_1 – матрица, состоящая из нулевых элементов размерности $[n \times n]$. Используя известный алгоритм непрерывной стабилизации линейных стационарных систем, найдем матрицу M, при которой спектр матрицы $A+BM$ лежит в левой полуплоскости. Чтобы подобрать матрицу K, гарантирующую расположение спектра матрицы $A - KT$ в левой полуплоскости, достаточно по упомянутому алгоритму найти матрицу K такую, чтобы спектр матрицы $-A^T + T^T K^T$ лежал в правой полуплоскости. Тогда из свойства произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем будет следовать, что спектр матрицы $A-KT$ лежит в левой полуплоскости. Отсюда и из структуры матрицы системы (20) следует экспоненциальная устойчивость системы (20) при выбранных матрицах M и K. С другой стороны, согласно замене (19), получим экспоненциальную устойчивость системы (16), (17), замкнутой управлением (18). Для удобства дальнейших рассуждений запишем ее в виде одного уравнения

$$\dot{\xi} = P\xi, \tag{21}$$

где

$$\xi = (x, \hat{x})^T, \quad P = \begin{pmatrix} A & BM \\ KT & A - KT + BM \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему (10), (11), замкнутую дискретным управлением

$$u(t) = M\hat{x}(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, \dots . \tag{22}$$

По аналогии с системой (16), (17) ее можно записать в виде одного уравнения

$$\dot{\xi} = Q\xi + R\xi(kh) + \bar{\varphi}(\xi, \xi(kh)) + \bar{\varphi}_1(\xi, \xi(kh)). \tag{23}$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} O & BM \\ O & BM \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi(kh)), K(g(\Gamma_1\xi(kh)) - g(\Gamma_2\xi(kh))))^T, \tag{24}$$

$$\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi(kh)), 0, \dots, 0)^T_{2n\times 1},$$

$$\Gamma_1 = (E, 0)_{n\times 2n}, \quad \Gamma_2 = (0, E)_{n\times 2n},$$

Здесь O – матрица с нулевыми элементами размерности $[n \times n]$. Наряду с системой (23) рассмотрим систему

$$\dot{\xi} = Q\xi + R\xi(kh) + \bar{\varphi}(\xi, \xi(kh)). \tag{25}$$

Введем в рассмотрение функцию $z(t)$

$$z(t) = \xi(t) - \xi(kh) = \xi(t) - \xi_k, \quad \xi_k = \xi(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{26}$$

Решение системы (25) на промежутке $[kh,(k+1)h]$, $k=0,1,\ldots$ имеет вид

$$\xi(t)=e^{Q(t-kh)}\xi_k+e^{Qt}\int_{kh}^{t}e^{-Q\tau}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau. \tag{27}$$

Сделаем в (27) замену переменной t на θ по формуле $t-kh=\theta$. Тогда при $\theta\in[0,h]$ получим

$$\xi(\theta+kh)=e^{Q\theta}\xi_k+e^{Q(\theta+kh)}\int_{kh}^{\theta+kh}e^{-Q(\tau+kh)}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau. \tag{28}$$

Равенство (28) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\xi(\theta+kh)=\xi_k+Qe^{Q\tilde{t}}h\xi_k+\\+e^{Q(\theta+kh)}\int_{kh}^{\theta+kh}e^{-Q(\tau+kh)}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau,\\ \theta\in[0,h],\quad \tilde{t}\in[0,h].\end{gathered} \tag{29}$$

Подставив (29) в (26), получим

$$\begin{gathered}z(\theta+kh)=\xi(\theta+kh)-\xi(kh)=\\=Qe^{Q\tilde{t}}h\xi_k+e^{Q(\theta+kh)}\int_{kh}^{\theta+kh}e^{-Q(\tau+kh)}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau,\\ \theta\in[0,h],\quad \tilde{t}\in[0,h].\end{gathered} \tag{30}$$

Из (30) следует

$$\begin{gathered}\|z(\theta+kh)\|\leqslant\|Q\|\|e^{Q\tilde{t}}\|\|\xi_k\|h+\\ \|e^{Q\theta}\|\int_{kh}^{\theta+kh}\|e^{-Q\tau}\|\|R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k)\|\,d\tau,\\ \theta\in[0,h],\quad \tilde{t}\in[0,h].\end{gathered} \tag{31}$$

На основании (2), (7), (12), (24) в области

$$\|\xi\|<C_1 \tag{32}$$

существует константа L такая, что

$$\|\bar{\varphi}(\xi,\xi_k)\|\leqslant L\|\xi_k\|. \tag{33}$$

В (32) $C_1 > 0$ – произвольное число.

Используя (33), неравенство (31) можно записать в более компактном виде

$$\|z(t)\| \leqslant L_1 h\|\xi_k\| + L_2 h\|\xi_k\|, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{34}$$

Константы L_1, L_2 в неравенстве (34) не зависят от номера промежутка $[kh, (k+1)h]$.

С другой стороны, согласно (26)

$$\|\xi_k\| \leqslant \|\xi(t)\| + \|z(t)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{35}$$

Неравенства (34), (35) дают оценку

$$\|z(t)\| \leqslant \frac{(L_1 + L_2)h}{1 - (L_1 + L_2)h}\|\xi(t)\|, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{36}$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (21), существует положительно определенная квадратичная форма $V(\xi)$ [2] такая, что

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(21)} = -\|\xi\|^2. \tag{37}$$

После несложных рассуждений нетрудно видеть, что производную $V(\xi)$ в силу системы (25) можно записать так

$$\begin{gathered}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} = -\|\xi\|^2 - (grad\, V, Rz) + (grad\, V, \Gamma_3 z) + \\ + \Big(grad\, V, \bar{\varphi}_2\big(\xi, \xi(kh)\big) - \bar{\varphi}_2(\xi, \xi)\Big) + \big(grad\, V, \bar{\varphi}_2(\xi, \xi)\big),\end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} O & O \\ -KT & KT \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}\bar{\varphi}_2(\xi, \xi(kh)) = \Big(\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi(kh)), K(g_1(\Gamma_1\xi(kh)) - g_1(\Gamma_2\xi(kh)))\Big)^T, \\ \bar{\varphi}_2(\xi, \xi) = \Big(\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi), K(g_1(\Gamma_1\xi) - g_1(\Gamma_2\xi))\Big)^T.\end{gathered} \tag{39}$$

В области (32) справедливы оценки

$$\|grad\, V\| \leqslant \gamma_1 \|\xi\|, \tag{40}$$

$$\|\bar{\varphi}_2(\xi, \xi(kh)) - \bar{\varphi}_2(\xi, \xi)\| \leqslant \gamma_2 \|\xi(kh) - \xi\| = \gamma_2 \|z\|. \tag{41}$$

Используя (38)–(41), получим неравенство

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} \leqslant -\|\xi\|^2 + \gamma_3 \|\xi\| \|z\| + \gamma_4 \|\xi\| \|z\| + \gamma_5 \|\xi\|^3. \tag{42}$$

В (42) γ_i, $i = \overline{1,5}$ – положительные константы, зависящие от области (32). Из (36), (38), (42) следует

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} \leqslant -\|\xi\|^2 + \left(\frac{\gamma_3(L_1+L_2)h}{1-(L_1+L_2)h} + \frac{\gamma_4(L_1+L_2)h}{1-(L_1+L_2)h}\right)\|\xi\|^2 + \gamma_5 \|\xi\|^3. \tag{43}$$

Выберем константы $C_2 > 0$, $h_0 > 0$: $0 < C_2 < C_1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\gamma_3(L_1+L_2)h_0}{1-(L_1+L_2)h_0} + \frac{\gamma_4(L_1+L_2)h_0}{1-(L_1+L_2)h_0} + \gamma_5 C_2 < 1. \tag{44}$$

Тогда для всех $h: 0 < h < h_0$ оценка (43) в области

$$\|\xi\| < C_2 \tag{45}$$

примет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} \leqslant -\gamma_6 \|\xi\|^2, \quad \gamma_6 > 0. \tag{46}$$

Производную функции $V(\xi)$ в силу системы (23) можно записать так

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(23)} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} + \big(grad\, V, \bar{\varphi}_1\big). \tag{47}$$

Оценивая правую часть (47) в области (45), с учетом (46), (45), (24), (13) получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(23)} \leqslant -\gamma_6 \|\xi\|^2 + \gamma_7 \|\xi\|^3. \tag{48}$$

Здесь $\gamma_7 > 0$ – константа. Выберем константу C_3: $0 < C_3 < C_2$ так, чтобы

$$\gamma_7 C_3 < \gamma_6. \tag{49}$$

Тогда в области

$$\|\xi\| < C_3 \tag{50}$$

на основании (49) имеет место неравенство

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(23)} \leqslant -\gamma_8 \|\xi\|^2, \quad \gamma_8 > 0. \tag{51}$$

С другой стороны, согласно [2], функция $V(\xi)$ является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова (37), и для нее справедлива оценка

$$\alpha_1 \|\xi\|^2 \leqslant V(\xi) \leqslant \alpha_2 \|\xi\|^2. \tag{52}$$

Константы $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ определяются матрицей квадратичной формы $V(\xi)$. Из (51), (52) следует

$$V(\xi) \leqslant V(\xi_0) e^{-\frac{\gamma_8}{\alpha_2} t}, \quad \xi_0 = (x(0), \hat{x}(0))^T, \quad t \in [0; +\infty). \tag{53}$$

Окончательно условия (52), (53) дают оценку

$$\|\xi(t, 0, \xi_0)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \|\xi_0\| e^{-\frac{\gamma_8}{2\alpha_2} t}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{54}$$

Пусть

$$\begin{gathered} \|\xi_0\| < C_3 \sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \\ \|\xi_0\| < \sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}} \tfrac{C}{\|M\|}. \end{gathered} \tag{55}$$

Положим

$$\varepsilon = \min\left\{ C_3 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{C}{\|M\|} \right\}.$$

Тогда из неравенств (54), (55) следует, что решение системы (23) не покидает области (50) и удовлетворяет условиям (9), а соответствующее ему управление (22) удовлетворяет ограничению (5). Теорема доказана.

Замечание 4.1 Повторяя дословно доказательство Теоремы 4.1, нетрудно убедиться, что в качестве асимптотического наблюдателя можно принять уравнение

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}, u) + KT(g(x) - g(\hat{x})).$$

Задача 4.2 Используя результаты измерителя (6), найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям

$$x(0) = 0, \quad \|x(t')\| < \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ – произвольное число, t' – заранее неизвестный момент времени.

Замечание 4.2 Очевидно, что решение Задачи 4.1 на промежутке $[0, t']$ дает решение Задачи 4.2 при t', удовлетворяющему условию

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\xi_0\| e^{-\frac{\gamma_8}{2\alpha_2}t'} < \varepsilon_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Мир. 1967. 223 с.
2. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., 1975. 494 с.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., 1971. 398 с.
4. *Квитко А. Н.* Решение задачи управления движением центра масс летательного аппарата // Вестн. С.-Петербург. ун-та, 1999, вып. 3. Сер. 1. С. 76–81.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., 1968. 475 с.
6. *Ailon A, Segev R.* Driving a linear constant system by a piecewise constant control. *International Journal of Control* 1988; **47**: 815—825.
7. *Aisagaliev, S. A.* (1991). On the theory of the controllability of linear systems. *Autom. Remote Control*, *52*(1), *2*, 163–171.
8. *Alzabut J.O.* Piecewise constant control of boundary value problem for linear impulsive differential systems. *Mathematical Methods in Engineering* 2007; 123–129.
9. *Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Mathematical theory of control systems design. 1996. Translated and revised from the 1989 Russian original. Mathematics and its Applications, 341, xxiv+668
10. *Balachandran, K.* (1988). Controllability of class of perturbed nonlinear systems. *Kybernetica*, *24*(1), 61–64.
11. *Balachandran, K.* (1985). Global and local controllability of nonlinear systems. *Proc. IEE-D*, *132*(1), 14–17.
12. *Balachandran, K., & Govindaraj, V.* (2014). Numerical controllability of fractional dynamical systems. *Optimization*, *63*(8), 1267–1279.
13. *K. Balachandran* Controllability of nonlinear systems with delays in both state and control variables. Kybernetika (Prague), 22, 1986, no. 4, 340–348.

14. *K. Balachandran* Complete controllability of nonlinear delay systems. IMA J. Math. Control Inform., 4, 1987, no. 2, 161–166.
15. *K. Balachandran* Global relative controllability of nonlinear systems with time-varying multiple delays in control. Internat. J. Control, 46, 1987, no. 1, 193–200.
16. *K. Balachandran, S. M. Anthoni and J. P. Dauer* Null controllability of nonlinear infinite neutral systems with delays in control. Comput. Math. Appl., 36, 1998, no. 2, 39–50.
17. *K. Balachandran and P. Balasubramaniam* Controllability of semilinear delay systems. Kybernetika (Prague), 30, 1994, no. 5, 517–524.
18. *K. Balachandran and J. P. Dauer* Controllability of perturbed nonlinear delay systems. IEEE Trans. Automat. Control, 32, 1987, no. 2, 172–174.
19. *K. Balachandran and J. P. Dauer* Null controllability of nonlinear infinite delay systems with distributed delays in control. J. Math. Anal. Appl., 145, 1990, no. 1, 274–281.
20. *K. Balachandran and D. Somasundaram* Controllability of a class of nonlinear systems with distributed delays in control. Kybernetika (Prague), 19, 1983, no. 6, 475–482.
21. *K. Balachandran and D. Somasundaram* Relative controllability of a class of nonlinear systems with delay in control. Indian J. Pure Appl. Math., 14, 1983, no. 11, 1327–1334.
22. *K. Balachandran and D. Somasundaram* Controllability of nonlinear systems consisting of a bilinear mode with distributed delays in control. IEEE Trans. Automat. Control, 29, 1984, no. 6, 573–575.
23. *K. Balachandran and D. Somasundaram* Relative controllability of nonlinear systems with time varying delays in control. Kybernetika (Prague), 21, 1985, no. 1, 65–72.
24. *Benzaid, Z.* (1987). Global null controllability of perturbed linear periodic systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, *7*(32), 623–625.
25. *Berdyshev, Yu. I.* (2006). On the construction of the attainability domain in a nonlinear problem. *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, *4*, 22–26 (in Russian).

26. *Chernous'ko, F. L.* (1987). Approximation of the attainability sets of controllable systems. *Differential equations and applications.*, *I*(II), 469–474 (in Russian).
27. *D. H. Chyung* On the controllability of linear systems with delay in control. IEEE Trans. Automatic Control, AC-15, 1970, 255–257.
28. *D. H. Chyung* Controllability of linear time-varying systems with delays. IEEE Trans. Automatic Control, AC-16, 1971, 493–495.
29. *Coron, J.M.* (2007). *Control and Nonlinearity.* Providence RI: American Mathematical Society.
30. *C. Dacka* Relative controllability of perturbed nonlinear systems with delay in control. IEEE Trans. Automat. Control, 27, 1982, no. 1, 268–270.
31. *J. P. Dauer and R. D. Gahl* Controllability of nonlinear delay systems. J. Optimization Theory Appl., 21, 1977, no. 1, 59–70.
32. *Dirk, A.* (1984). Controllability for polynomial systems. *Lect. Notes Contr. And Jnt. Sci.*, *63*, 542–545.
33. *Emel'yanov, S. V., Krishchenko, A. P., & Fetisov, D. A.* (2013). Investigation of the controllability of affine systems. *Dokl. Math.*, *87*(2), 245–248.
34. *Furi, M., Nistri, P., Pera, M. P., & Zezza, P. L.* (1985) Topological methods for the global controllability of nonlinear systems. *J. Optim. Theory and Appl.*, *45*(2), 231–256.
35. *Furi M, Nistri P, Pera M.P., Zezza P.* Linear controllability by piece constant controls with assigned switching times. *Jornal of optimization theory and application* 1985; **45**(2): 219-229. DOI: 10.1007/BF00939978
36. *Gabasov, R., Kirillova F.* (1971). The qualitative theory of optimal processes. *Monographs in Theoretical Foundations of Technical Cybernetics*(in Russian)
37. *Gabdrakhimov A.F.* On the stabilization of linear stationary control systems with incomplete feedback (Russian). *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* 2008; **2**: 30–31.
38. *Gryn L.* Diskrete-feedback stabilization of semilinear control systems. *Control. Optimization and Calculus of variations* 1996; **1**: 207-224.

39. *Huashu, O.* (1985). On the controllability of nonlinear control system. *Comput. and Math.*, *10*(6), 441–451.
40. *Kalman R.E., Falb, P.L., Arbib, M.A.* Topics in mathematical system theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.
41. *J. Klamka* Controllability of nonlinear systems with delay in control. IEEE Trans. Automatic Control, AC-20, 1975, no. 5, 702–704.
42. *J. Klamka* Relative controllability of nonlinear systems with delays in control. Automatica–J. IFAC 12 (1976), no. 6, 633–634.
43. *J. Klamka* Relative controllability of linear systems with varying delay. Systems Sci., 2, 1976, no. 3, 17–24.
44. *J. Klamka Approximate controllability of delayed dynamical systems.* Appl. Math. Comput. Sci., 7, 1997, no. 1, 5–16.
45. *J. Klamka* Constrained controllability of semilinear systems with delays. Nonlinear Dynam., 56, 2009, no. 1-2, 169–177.
46. *J. Klamka* Constrained controllability of second order dynamical systems with delay. Control Cybernet., 42, 2013, no. 1, 111–121.
47. *Komarov, V. A.* (1984). Design of constrained control signals for nonlinear non-autonomous systems. *Autom. Remote Control*, *45*, *1*(10), 1280–1286.
48. *Komarov, V. A.* (1985). Estimates of reachable sets for linear systems. *Math. USSR-Izv.*, *25*(1), 193–206.
49. *Kondrat'yev, D. L., & Lotov, A. V.* (1990). External estimates and construction of attainability sets for controlled systems. *USSR Comp. Math. and Math. Phys.*, *30*(2), 93—97.
50. *Korobov, V. I.* (2007). Geometric criterion for controllability under arbitrary constraints on the control. *J. Optim. Theory Appl.*, *134*(2), 161–176.
51. *Krishchenko, A. P.* (1984). Controllability and attainability sets of nonlinear control systems. *Autom. Remote Control*, *45*, *1*(6), 707–713.
52. *Kvitko, A. N.* (2004). On a control problem. *Diff. Equations*, *40*(6), 789–796.
53. *Kvitko AN, Yakusheva DB.* Synthesis of discrete Stabilization for a nonlinear stationary control system under incomplete

information. *Vestnik St.Peterburg Uneversity. Mathimatics* 2012; **45**(2): 65-72 @ Allerton Press, Inc, 2012 Original Russian text@

54. *Kvitko, A., Yakusheva, D.* (2017). On one boundary problem for nonlinear stationary controlled system. *International Journal of Control*, *1*(12).
55. *Lapin S.V.* Piecewise-constant stabilization of systems that are linear with respect to control. *Automat. Remote Control* 1992; **53**(6) part 1: 816–822.
56. *Lepe, N. L.* (1984). A geometrical approach to studying the controllability of second-order bilinear systems. *Autom. Remote Control*, *45*(11), 1401–1406.
57. *Lotov, A. V.* (1987). Approximation and stability of generalized attainability sets (Russian). *Cybernetics and computer technology*, *3*, 197–208.
58. *Levakov, A. A.* (1987). On the controllability of linear nonstationary systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, *23*(5), 798–806 (in Russian).
59. *A. Manitius and A. W. Olbrot* Controllability conditions for linear systems with delayed state and control. Arch. Automat. i Telemech., 17, 1972, 119–131.
60. *S. A. Minyuk and S. N. Lyakhovets* A problem of controllability for systems with several delays. (Russian). Vestnik Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk, 1980, no. 2, 12–17.
61. *A. W. Olbrot* On controllability of linear systems with time delays in control. IEEE Trans. Automatic Control, AC-17, 1972, no. 5, 664–666.
62. *Panteleev, V. P.* (1985). Controllability of time-dependent linear systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, *21*(4), 623–628 (in Russian).
63. *Peregudova O.A., Filatkina E.V.* On stabilization of cascade-type non-linear systems with picewise constant control (Russian). *Review of applied and industrial mathematics* 2014; **21**(1): 1–3.
64. *Petrov N.N.* A solution of a certain problem in control theory (Russian). *Differencial'nye Uravnenija* 1969; **5**: 962–963.
65. *Petrov N.N.* Local controllability of autonomous systems (Russian). *Differencial'nye Uravnenija* 1968; **4**: 1218–1232.

66. *Plotnikov AV, Arsiry AV, Komleva TA.* Piecewise Constant Controller linear fuzzy Systems. *Int.J.Industrial Mathematics* 2012; **4**(2): 77-85.
67. *Popova, S. N.* (2003). Local attainability for linear control systems. *Diff. Equations*, *39*(1), 51–58.
68. *Radhakrishnan, B., Balachandran, K., & Anukokila, P.* (2014). Controllability results for fractional integrodifferential systems in Banach spaces. *Int. J. Comput. Sci. Math.*, *5*(2), 184–197.
69. *O. Sebakhy and M. M. Bayoumi* A simplified criterion for the controllability of linear systems with delay in control. IEEE Trans. Automatic Control AC-16, 1971, no. 4, 364–365.
70. *O. Sebakhy and M. M. Bayoumi* Controllability of linear time-varying systems with delay in control. Int. J. Control, 17, 1973, 127–135.
71. *Seilova R.D., Amanov T.D.* Construction of piece wise constant controls for linear impulsive systems. *Proceedings of International Symposium Reliability and quality* 2005; 4–5.
72. *Shushlyapin E.A.* On the equalency of piecewise-constant control with a unknown number of switchings and arbitrary amplitude bounded control in a terminal problem for a linear nonstatinary system. *Jornal of soviet mathimatics* 1993; **65**(2): 1550-1554.
73. *A. S. C. Sinha and C. F. Yokomoto* Null controllability of a nonlinear system with variable time delay. IEEE Trans. Automat. Control, 25, 1980, no. 6, 1234–1236.
74. *A. S. C. Sinha* Null-controllability of nonlinear infinite delay systems with restrained controls. Internat. J. Control, 42, 1985, no. 3, 735–741.
75. *A. S. C. Sinha* Controllability of nonlinear delay systems. Internat. J. Control, 43, 1986, no. 4, 1305–1315.
76. *Smirnov E.Ya.* Stabilization of programmed motion. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2000.
77. *Sontgan, E. D.* (1998). Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional systems.
78. *Valeev Yu.D., Tashkov D.V.* Control of two-point boundary valued problem (Russian). *Vestnik Tambov Univ.* 1999; **4**(1): 63–66.

79. *Walczak, S.* (1984). A Note on the controllability of nonlinear systems. *Math. Systems Theory*, *17*(4), 351–356.

Подписано в печать 17.09.2020. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 7,03. Тираж 50 экз. Заказ № 1241.

Отпечатано в Издательстве ВВМ.
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.